11. Konvolusi

Operasi konvolusi yang akan kita bahas di sini sebetulnya pernah kita jumpai pada pembahasan deret Fourier (ketika membuktikan kekonvergenan jumlah parsialnya). Operasi konvolusi merupakan pengganti operasi perkalian yang 'berjodoh' dengan transformasi Fourier (seperti halnya operasi komposisi berjodoh dengan turunan).

11.1 Konvolusi dan Sifat-Sifat Dasarnya

Misalkan f dan g fungsi yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$. *Konvolusi* dari f dan g adalah fungsi $f * g$ yang didefinisikan sebagai

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy,$$

asalkan integral ini konvergen.

Perhatikan jika $f \in L^1$ dan g terbatas, misalkan $|g(x)| \le M$ hampir di mana-mana, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dy < \infty.$$

Hal serupa terjadi jika f terbatas dan $g \in L^1$. Selanjutnya, kita amati pula jika $f, g \in L^2$, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \le \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^2 dy\Big]^{1/2} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy\Big]^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty.$$

Jadi konvolusi dari f dan g terdefinisi dengan baik setidaknya untuk beberapa kasus di atas. Lebih jauh, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema. Jika $f, g \in L^1$, maka fungsi $y \mapsto f(x-y)g(y)$ ada di L^1 untuk hampir setiap $x \in \mathbf{R}$, $f * g \in L^1$, dan

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Bukti. Fungsi $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ merupakan fungsi terukur pada $\mathbf{R}^2$. Selanjutnya,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx\,dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

Jadi, hipotesis Teorema Fubini dipenuhi, dan karena itu fungsi $y \mapsto f(x-y)g(y)$ ada di L^1 untuk hampir setiap $x \in \mathbf{R}$, $f * g \in L^1$, dan

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right| dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy\,dx = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty,$$

sebagaimana yang diharapkan. (QED)

Teorema (Sifat-sifat konvolusi). Misalkan $f, g, h \in L^1$ dan $a, b \in \mathbf{R}$. Maka

(i) $a(f*g) = (af*g) = f*(ag)$;

(ii) $f*(ag+bh) = a(f*g) + b(f*h)$;

(iii) $f*g = g*f$;

(iv) $f*(g*h) = (f*g)*h$.

Bukti. Latihan.

Teorema. Misalkan f mempunyai turunan dan konvolusi $f*g$ dan $f'*g$ terdefinisi dengan baik. Maka $f*g$ mempunyai turunan dan $(f*g)' = f'*g$.

Bukti. Latihan

Walaupun operasi konvolusi itu komutatif, kita dapat memandang salah satu fungsi, sebutlah g, sebagai *konvolutor* dalam $f*g$. Diberikan fungsi f, kira- kira apa yang dilakukan oleh konvolutor g terhadap f? Sebagai gambaran, perhatikan contoh berikut. Misalkan $a > 0$ dan

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{jika } -a < x < a, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka,

$$f*g(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x-y)\,dy = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy.$$

Di sini $f*g(x)$ dapat diinterpretasikan sebagai proses perataan di sekitar x. Tetapi x berjalan; sehingga $f*g$ dapat dipandang sebagai proses 'perataan berjalan' terhadap f. Secara umum, hasilnya adalah suatu fungsi yang lebih mulus daripada f semula.

11.2 Konvolusi dan Transformasi Fourier

Operasi konvolusi tidak mempunyai unsur identitas. Andaikan ada unsur identitas, misalnya e, maka $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$. Ini mustahil, karena kita mempunyai teorema berikut.

Teorema. Misalkan $f, g \in L^1$. Maka, $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Bukti. Berdasarkan definisi, Teorema Fubini, dan substitusi peubah $z = x - y$, kita peroleh

$$
\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-i\xi x} dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)} g(y)e^{-i\xi y} dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\xi z} dz \ g(y)e^{-i\xi y} dy \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian teorema terbukti. (QED)

Akibat. Tidak terdapat fungsi $e \in L^1$ yang memenuhi $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$.

Bukti. Andaikan ada fungsi $e \in L^1$ sedemikian sehingga $f * e = f$ untuk setiap $f \in L^1$, maka $\widehat{e}(\xi) = 1$ untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Ini bertentangan dengan Teorema Riemann-Lebesgue yang mengharuskan $\widehat{e}(\xi) \to 0$ untuk $|\xi| \to \infty$. (QED)

Walau tidak ada unsur identitas terhadap operasi konvolusi, terdapat *identitas hampiran* — yang akan kita bahas pada bagian berikut.

11.3 Identitas Hampiran

Misalkan $\phi \in L^1$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, definisikan

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Perhatikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big) d\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, dy.$$

Lebih jauh, untuk $a < b$ sembarang, kita mempunyai

$$\int_a^b \phi_\epsilon(x)\,dx = \int_{a/\epsilon}^{b/\epsilon} \phi(y)\,dy,$$

yang menghampiri $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,dy$ apabila $\epsilon \approx 0$.

Teorema Misal $\phi \in L^1$ sedemikian sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,dy = 1$, $\alpha := \int_{-\infty}^{0} \phi(y)\,dy$ dan $\beta := \int_0^\infty \phi(y)\,dy$ (sehingga $\alpha + \beta = 1$). Misalkan f kontinu bagian demi bagian pada $\mathbf{R}$, dan misalkan f terbatas *atau* ϕ bernilai nol di luar suatu interval terhingga – sehingga $f * \phi$ terdefinisi dengan baik. Definisikan ϕ_ϵ untuk $\epsilon > 0$, seperti di atas. Maka

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \phi_\epsilon(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Khususnya, jika f kontinu di x, maka

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \phi_\epsilon(x) = f(x).$$

Lebih jauh, jika f kontinu di setiap titik pada $[a, b]$, maka kekonvergenan di atas merupakan kekonvergenan seragam pada $[a, b]$.

Bukti. Untuk setiap $x \in \mathbf{R}$ dan $\epsilon > 0$, tuliskan

$$\begin{aligned} f * \phi_\epsilon(x) - (\alpha f(x+) + \beta f(x-)) = & \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x+)]\phi_\epsilon(y)\,dy + \\ & + \int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)]\phi_\epsilon(y)\,dy. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa kedua integral di ruas kanan dapat dibuat sekecil-kecilnya dengan cara memilih ϵ cukup kecil. Karena mirip, kita hanya akan menggarap integral kedua. Diberikan $\delta > 0$, pilih $c > 0$ cukup kecil sehingga $|f(x-y) - f(x-)| < \delta$ untuk $0 < y < c$. Di sini, c mungkin bergantung pada x, selain pada δ. Sekarang tuliskan $\int_0^\infty \ldots = \int_0^c \ldots + \int_c^\infty \ldots$. Maka

$$\Big|\int_0^c [f(x-y) - f(x-)]\phi_\epsilon(y)\,dy\Big| \le \delta \int_0^c |\phi_\epsilon|\,dy \le \delta \|\phi\|_1.$$

Untuk $x > c$, jika f terbatas, katakan $|f(x)| \le M$, maka

$$\Big|\int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)]\phi_\epsilon(y)\,dy\Big| \le 2M \int_c |\phi_\epsilon(y)|\,dy = 2M \int_{c/\epsilon}^{\infty} |\phi(y)|\,dy,$$

yang dapat dibuat lebih kecil daripada δ dengan cara memilih ϵ cukup kecil (karena $\phi \in L^1$). Jika yang diketahui adalah ϕ bernilai nol di luar suatu interval $[-R, R]$, maka $\phi_\epsilon(x) = 0$ untuk $|x| > \epsilon R$. Dalam hal ini, kita pilih $\epsilon < \frac{c}{R}$ sehingga $\phi_\epsilon(x) = 0$ untuk $x > c$ (karena $c > \epsilon R$). Akibatnya,

$$\int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)]\phi_\epsilon(y)\, dy = 0.$$

Jadi, sebagai kesimpulan, kita peroleh bahwa

$$\int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)]\phi_\epsilon(y)\, dy \to 0,$$

bila $\epsilon \to 0$. Ini membuktikan bagian pertama dari teorema.

Selanjutnya, jika f kontinu di x, maka

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \phi_\epsilon(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = f(x).$$

Akhirnya, jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f kontinu seragam pada $[a, b]$ sehingga pemilihan c (dan konsekuensinya juga pemilihan ϵ) dapat dibuat bebas dari $x \in [a, b]$. Dalam hal ini, $f * \phi_\epsilon(x) \to f(x)$ secara seragam pada $[a, b]$. (QED)

Teorema. Misalkan $\phi \geq 0$ dan $\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\, dx = 1$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, definisikan $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Maka, untuk setiap $f \in L^p$, kita mempunyai

$$\|\phi_\epsilon * f - f\|_p \to 0, \quad \epsilon \to 0.$$

Bukti. Tidak dibahas. (Lihat Hewitt & Stromberg, Teorema 21.37, bila penasaran.)

`Catatan`. Keluarga fungsi $\{\phi_\epsilon\}$ disebut *identitas hampiran*, karena operasi konvolusi dengan ϕ_ϵ memberikan hampiran terhadap operator identitas bila $\epsilon \to 0$.

11.4 Fungsi Gauss dan Teorema Aproksimasi Weierstrass

Salah satu fungsi yang sering digunakan untuk identitas hampiran adalah fungsi Gauss $G(y) := \pi^{-1/2} e^{-y^2}$. Perhatikan bahwa

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy\right]^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi.$$

Jadi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} G(y)\,dy = 1$. Selain itu, fungsi G genap, sehingga $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} G(y)\,dy = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \int_0^{\infty} G(y)\,dy = \frac{1}{2}$. Lebih jauh, $G^{(k)}(y) = P_k(y)e^{-y^2}$ untuk suatu polinom P_k berderajat k, sehingga $|G^{(k)}(y)| \le C_k e^{-|y|}$. Jadi, jika f terbatas, maka $f * G_\epsilon$ merupakan fungsi $C^{(\infty)}$ yang menghampiri f bila $\epsilon \approx 0$.

Teorema Aproksimasi Weierstrass. Jika f kontinu pada interval terhingga $[a,b]$, maka f merupakan limit seragam dari polinom pada $[a,b]$, yakni untuk setiap $\delta > 0$ terdapat polinom P sedemikian sehingga

$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| < \delta.$$

Bukti. Perluas f ke seluruh $\mathbf{R}$ sehingga f kontinu dan bernilai nol di luar interval $[a-1, b+1]$. Maka, menurut teorema sebelumnya, $f * G_\epsilon \to f$ secara seragam pada $[a,b]$, dengan $G(y) = \pi^{-1/2}e^{-y^2}$. Selanjutnya, diberikan $\delta > 0$, dapat dipilih $\epsilon > 0$ cukup kecil sehingga

$$\sup_{a \le x \le b} \left| f(x) - \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \int_{a-1}^{b+1} e^{-(x-y)^2/\epsilon^2} f(y)\,dy \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Sekarang, untuk $x \in [a,b]$ dan $y \in [a-1, b+1]$, kita mempunyai $\frac{x-y}{\epsilon} \in \left[\frac{a-b-1}{\epsilon}, \frac{b-a+1}{\epsilon}\right]$, dan deret Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$ konvergen seragam ke e^{-t^2} pada selang tersebut. Karena itu kita dapat menghampiri $e^{-(x-y)^2/\epsilon^2}$ dengan suatu polinom Taylor $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^{2n}$, dengan N cukup besar sehingga

$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| < \delta,$$

dengan

$$P(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{N} \int_{a-1}^{b+1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^{2n} f(y)\,dy.$$

Di sini P merupakan polinom (berderajat $2N$) yang kita cari. (QED)

11.5 Soal Latihan

1. Diketahui $\phi = \chi_{[-1,1]}$. Tentukan
   (i) $\phi * \phi$.
   (ii) $\phi * \phi * \phi$.
2. Misalkan $\phi = \chi_{[-1,1]}$ dan $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Misalkan $f(x) = x^3 - x$. Hitunglah $f * \phi_\epsilon$ dan periksa bahwa $f * \phi_\epsilon \to 2f$ bila $\epsilon \to 0$. [Catat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,dy = 2$.]