12. Teorema Inversi Fourier dan Transformasi Fourier di $L^2(\mathbf{R})$

12.1 Teorema Inversi Fourier

Dari hasil hitung-hitungan kasar di awal bagian ke-10, kita ingin membuktikan bahwa, dalam kondisi tertentu, kita mempunyai

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = (\widehat{f})\check{}\,(x),$$

untuk (hampir) setiap $x \in \mathbf{R}$. Melalui kesamaan inilah kita dapat memperoleh f kembali dari $\widehat{f}$. Tetapi kapankah kesamaan ini berlaku?

Teorema Inversi Fourier. Misalkan $f \in L^1$, kontinu bagian demi bagian, dan $\widehat{f} \in L^1$. Maka f kontinu dan

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi,$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Bukti. Misalkan $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ dan $\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\phi\big(\frac{x}{\epsilon}\big)$. Maka $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx = 1$, sehingga menurut teorema yang lalu, $f*\phi_\epsilon(x) \to \frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f*\phi_\epsilon(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Untuk itu, perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbf{R}$

$$f*\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^2}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi,$$

mengingat

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^2} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\big(e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}}\big)(y-x) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}}e^{i\xi(x-y)}d\xi.$$

Sekarang jika $\epsilon \to 0$, maka $e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}} \to 1$; sehingga $\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}} \to \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}$ untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Selain itu, untuk setiap $\epsilon > 0$, kita mempunyai

$$\Big||\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}e^{-\frac{\epsilon^2\xi^2}{2}}\Big| \le |\widehat{f}(\xi)|,$$

untuk setiap $\xi \in \mathbf{R}$. Karena $\widehat{f} \in L^1$, maka menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue,

$$f * \phi_\epsilon(x) \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{i\xi x} d\xi,$$

dan ini berlaku untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Jadi, karena limit itu tunggal, kita peroleh

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)].$$

Namun, integral di ruas kiri tak lain adalah transformasi Fourier dari $\widehat{f}$ yang dihitung di $-x$. Karena itu ia merupakan fungsi yang kontinu, sehingga f mestilah kontinu dan

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} dx,$$

sebagaimana yang diharapkan. (QED)

Akibat. Misal $f, g \in L^1$ dengan $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$. Jika $\widehat{f} = \widehat{g}$, maka $f = g$.

Bukti. Jika $\widehat{f} = \widehat{g}$, maka $(f-g)\widehat{\ } = 0$. Akibatnya,

$$(f-g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f-g)\widehat{\ }(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, d\xi = 0,$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. (QED)

`Catatan`. (1) Teorema Inversi Fourier memberitahu kita bahwa transformasi Fourier mempunyai invers, yang kita sebut *transformasi Fourier invers.* Jika transformasi Fourier kita lambangkan dengan $\mathcal{F}$, maka transformasi Fourier invers dilambangkan dengan $\mathcal{F}^{-1}$. Jadi, jika $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, maka $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} = (\widehat{f})\check{\ }$.
(2) Terdapat banyak fungsi $f \in L^1$ yang mempunyai transformasi Fourier $\widehat{f}$ di L^1. Sebagai contoh, jika f'' ada, f' dan f'' terintegralkan, maka $(f'')\widehat{\ }(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi)$ terbatas, sehingga $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1+\xi^2}$ dan karena itu $\widehat{f} \in L^1$. Perhatikan pula bahwa dalam hal ini f dan $\widehat{f}$ terbatas dan kontinu, sehingga keduanya merupakan fungsi di L^2.

Teorema berikut menyatakan bahwa fungsi f dapat diperoleh kembali dari transformasi Fourier invers via *nilai utama*-nya.

Teorema. Jika f terintegralkan dan mulus bagian demi bagian pada $\mathbf{R}$, maka

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)],$$

untuk setiap $x \in \mathbf{R}$.

Bukti. Lihat Folland, hal. 220-221.

12.2 Transformasi Fourier di L^2

Kita telah membahas transformasi Fourier di L^1, namun, berdasarkan pengalaman dengan deret Fourier, ruang L^2 semestinya berperan juga. Perhatikan jika $f, g \in L^1 \cap L^2$ sedemikian sehingga $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$, maka

$$2\pi\langle f, g\rangle = 2\pi \int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\int f(x)e^{-i\xi x}\overline{\widehat{g}(\xi)}dxd\xi = \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle.$$

Khususnya, jika $f = g$, maka kita peroleh *kesamaan Plancherel* $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$.

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1 \cap L^2$ padat di L^2, transformasi Fourier dari fungsi $f \in L^2$ dapat didefinisikan sebagai limit dari suatu barisan $\widehat{f_n}$ (dalam norm L^2), dengan $f_n \in L^1 \cap L^2$ dan $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ dalam norm L^2. Semua ini dapat dilakukan sebagaimana dijamin oleh teorema berikut:

Teorema. Misalkan $f \in L^2$. Untuk $n \in \mathbf{N}$, definisikan $f_n = \chi_{[-n,n]}f$, yakni

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } |x| \le n, \\ 0, & \text{jika } |x| > n. \end{cases}$$

Maka, $f_n \in L^1 \cap L^2$ dan $\widehat{f_n} \in L^2$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Lebih jauh, $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ dalam norm L^2 dan $(\widehat{f_n})$ konvergen (dalam norma L^2) ke suatu fungsi di L^2.

Bukti. Menurut ketaksamaan Holder, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|\,dx &= \int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx \\ &\le \Big[\int_{-n}^{n} |f(x)|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_{-n}^{n} dx\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|f\|_2 \cdot (2n)^{\frac{1}{2}} < \infty.\end{aligned}$$

Jadi, $f_n \in L^1$. Kemudian mengingat $|f_n(x)| \le |f(x)|$, kita peroleh pula $f_n \in L^2$. Dengan demikian, $f_n \in L^1 \cap L^2$ dan, menurut kesamaan Plancherel, $\widehat{f_n} \in L^2$.

Perhatikan bahwa $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ titik demi titik. Berdasarkan Teorema Kekonvergenan Monoton,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

yakni, $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ dalam norma L^2.

Selanjutnya akan kita tunjukkan bahwa $(\widehat{f_n})$ konvergen (dalam norma L^2) ke suatu fungsi di L^2. Mengingat L^2 lengkap, cukup kita tunjukkan bahwa $\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2 \to 0$ $(m, n \to \infty)$. Namun $\widehat{f_m} - \widehat{f_n}$ adalah transformasi Fourier dari $f_m - f_n \in L^1 \cap L^2$. Karena itu, menurut kesamaan Plancherel,

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2^2 = 2\pi\|f_m - f_n\|_2^2 = 2\pi\Big[\int_{-n}^{-m} |f(x)|^2 dx + \int_m^n |f(x)|^2 dx\Big] \to 0,$$

apabila $m, n \to \infty$. Ini mengakhiri pembuktian. (QED)

Dengan pengamatan di atas, kita definisikan transformasi Fourier dari $f \in L^2$ sebagai

$$\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$$

(dalam norm L^2), di mana $f_n = \chi_{[-n,n]}f,\ n \in \mathbf{N}$.

`Catatan`. (1) Jika $f \in L^2$ dan $f_n = \chi_{[-n,n]}f,\ n \in \mathbf{N}$, maka definisi di atas mengatakan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 = 0$. Mengingat $\widehat{f}$ didefinisikan hanya sebagai anggota L^2, fungsi $\widehat{f}(x)$ hanya terdefinisi hampir di mana-mana. Selanjutnya, jika $f \in L^1 \cap L^2$, maka sekarang kita mempunyai dua definisi untuk $\widehat{f}$. Namun, kedua definisi ini konsisten karena limit dalam norma L^2 mestilah sama dengan limit titik demi titiknya.
(2) Demikian pula, definisi di atas tidak bergantung pada pemilihan barisan fungsi (f_n) yang konvergen ke f dalam norm L^2. Andaikan anda menggunakan barisan fungsi (g_n) yang konvergen ke f dalam norm L^2 dan mendefinisikan $\widehat{g} := \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}$, maka

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2^2 = 2\pi\|f_n - g_n\|_2^2 \to 0.$$

Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{g_n}$.

Teorema (Kesamaan Plancherel). Jika $f \in L^2$, maka $\|\widehat{f}\|_2 = 2\pi\|f\|_2$.

Bukti. Latihan.

Teorema (Kesamaan Plancherel). Jika $f, g \in L^2$, maka $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = 2\pi\langle f, g\rangle$.

Bukti. Latihan.

Teorema Inversi Fourier di L^2. Jika $f \in L^2$, maka

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi - f(x) \right\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Bukti. Lihat Rudin, hal. 186-187.

12.3 Soal Latihan

1. Buktikan Kesamaan Plancherel (yang dinyatakan dalam dua teorema sebelum teorema terakhir).
2. Diketahui $a > 0$. Buktikan secara langsung bahwa $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$ dan kemudian degan menggunakan Teoema Inversi Fourier tunjukkan bahwa $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right](\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$.
3. Untuk $a > 0$, definisikan $f_a(x) := \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ dan $g_a(x) := \frac{\sin ax}{\pi x}$. Buktikan bahwa $f_a * f_b = f_{a+b}$ dan $g_a * g_b = g_{\min\{a,b\}}$.
4. Misalkan f kontinu dan mulus bagian demi bagian, $f \in L^2$, dan $f' \in L^2$. Buktikan bahwa $\widehat{f} \in L^1$.