13. Aplikasi Transformasi Fourier

Misal A adalah operator linear pada fungsi yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ dengan sifat: jika $A[f(x)] = g(x)$, maka $A[f(x+s)] = g(x+s)$ untuk setiap $s \in \mathbf{R}$. Maka, fungsi $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbf{C}$) yang ada di domain A merupakan fungsi eigen dari A. Persisnya, jika $f(x) = e^{ax}$ dan $g = A[f]$, maka untuk setiap $s \in \mathbf{R}$ berlaku

$$g(x+s) = A[e^{a(x+s)}] = A[e^{as}e^{ax}] = e^{as}A[e^{ax}] = e^{as}g(x).$$

Untuk $x = 0$, kita peroleh: $g(s) = g(0)e^{as}$ untuk setiap $s \in \mathbf{R}$. jadi, $Af = g = Cf$ dengan $C = g(0)$.

Selanjutnya, misalkan domain A mencakup fungsi $k(x) = e^{i\xi x}$ dan $h(\xi)$ adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $k(x)$, yakni: $A[e^{i\xi x}] = h(\xi)e^{i\xi x}$. Jika A memenuhi suatu persayaratan kekontinuan (yang memungkinkan A bertukar dengan pengintegralan), maka operasi A pada f dapat dibaca melalui rumus inversi Fourier. Persisnya, jika

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi,$$

maka

$$A[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A[e^{i\xi x}]\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)h(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Jadi,

$$A[f]\widehat{\ }(\xi) = h(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Sekarang, jika $h(\xi) = \widehat{H}(\xi)$, maka $Af = H * f$, yakni A merupakan operator konvolusi dengan H. Semua ini sah apabila, misalnya, f dan H merupakan fungsi L^1 atau L^2.

13.1 Aplikasi pada Persamaan Panas

Sekarang kita akan melihat bagaimana transformasi Fourier digunakan pada persamaan diferensial klasik, khususnya persamaan panas pada $\mathbf{R}$, yaitu:

$$u_t = ku_{xx} \quad (-\infty < x < \infty),$$

dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ (dengan $f \in L^1$), dan "syarat batas" $u(x,t) \to 0$ dan $f(x) \to 0$ bila $x \to \pm\infty$.

Terapkan transformasi Fourier pada kedua ruas persamaan (yang keduanya kita anggap merupakan fungsi dari x), kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= -k\xi^2 \widehat{u}(\xi,t) \\ \widehat{u}(\xi,0) &= \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}.$$

Dengan Teorema Inversi Fourier, akhirnya kita peroleh solusi persamaan panas

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi.$$

Namun, ada cara kedua, sebagai berikut. Transformasi Fourier invers dari $e^{-k\xi^2 t}$ adalah $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. Jadi

$$u(x,t) = K_t * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\, dy.$$

Dapat diperiksa bahwa $u_0(x,t) = K_t(x)$ memenuhi persamaan panas dan dengan menurunkannya di bawah tanda integral $u(x,t)$ juga memenuhi persamaan panas. Lebih jauh, mengingat $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}K_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, maka $u(x,t) \to f(x)$ bila $t \to 0$ (dengan mengasumsikan bahwa f kontinu). Jadi mestilah $u(x,0) = f(x)$.

Sebagai interpretasi fisis, jika suhu awal adalah 0, dan kawat diberi satu satuan panas di $x = 0$, maka setelah t satuan waktu, distribusi panasnya adalah $K_t(x)$ (catat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x)dx = 1$). Jika kawat diberi satu satuan panas di $x = y$, maka distribusi panasnya adalah $K_t(x-y)$. Sekarang misalkan pada awalnya terdapat panas $f(y)dy$ pada suatu interval kecil di sekitar $x = y$. Maka, setelah t satuan waktu, distribusi panas yang berasal dari interval tersebut adalah $K_t(x-y)f(y)dy$. Dengan prinsip superposisi, kita peroleh

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y)f(y)\, dy.$$

(Catatan: Fungsi $K_1(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}$ dikenal sebagai *kernel panas* atau *kernel Gauss.*)

13.2 Persamaan Laplace pada Setengah Bidang

Sekarang tinjau persamaan Laplace pada setengah bidang:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x \in \mathbf{R},\ y > 0),$$

dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ (dengan f terbatas, karena kita menginginkan solusi yang terbatas juga).

Terapkan transformasi Fourier pada kedua ruas persamaan, kita peroleh

$$-\xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{u}(\xi, y) = 0,$$

dengan syarat awal $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$. Solusi persamaan diferensial ini adalah

$$\widehat{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{|\xi| y} + C_2(\xi) e^{-|\xi| y},$$

dengan $C_1(\xi) + C_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$.

Karena f terbatas, $e^{|\xi| y}$ bukan solusi. Jadi $C_1(\xi) = 0$ dan $C_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, sehingga

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}.$$

Sekarang, jika $P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$, maka $\widehat{P}_y(\xi) = e^{-|\xi| y}$ dan karena itu

$$u(x, y) = P_y * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x-t)}{\pi(t^2 + y^2)}\, dt.$$

Rumus ini dikenal sebagai *rumus integral Poisson* dan P_1 dikenal sebagai *kernel Poisson.*

Perhatikan bahwa $P_y \in L^1$, sehingga integral Poisson terdefinisi untuk f yang terbatas. Persisnya, jika $|f| \le M$, maka

$$|u(x, y)| \le M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)}\, dt = M.$$

Selain itu, fungsi $u_0(x, y) = P_y(x)$ memenuhi persamaan Laplace dan $u(x, y) \to f(x)$ bila $y \to 0$.

12.3 Teorema Sampling Shannon

Kita telah mempelajari bagaimana sebuah fungsi dapat direkonstruksi dari barisan koefisien Fourier-nya. C. Shannon (1949) mengamati bahwa dalam hal khusus, sebuah fungsi bahkan dapat direkonstruksi dari titik-titik sampel-nya, dengan menggunakan keluarga fungsi sinc (sinc $x = \frac{\sin x}{x}$). Persisnya, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema (Teorema sampling Shannon) Jika $f \in L^2(\mathbf{R})$ dan supp $\widehat{f} \subseteq [-T, T]$, maka

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi}$$

dalam norma $L^2(\mathbf{R})$.

Bukti. Mengingat $\widehat{f} \in L^1(-T, T) \cap L^2(-T, T)$, kita dapat menguraikan $\widehat{f}$ sebagai deret Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{-k} e^{-i\pi k\xi/T}, \quad \xi \in [-T, T],$$

dengan

$$c_{-k} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{i\pi k\xi/T} d\xi = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\pi k\xi/T} d\xi = \frac{\pi}{T} f\left(\frac{k\pi}{T}\right).$$

Menggunakan teorema inversi Fourier sekali lagi, kita peroleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{-i\pi k\xi/T} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \int_{-T}^{T} e^{i(x - \frac{k\pi}{T})\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \frac{e^{i(x - \frac{k\pi}{T})\xi}}{i(x - \frac{k\pi}{T})} \Big]_{-T}^{T} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) \frac{\sin(Tx - k\pi)}{Tx - k\pi}, \end{aligned}$$

di mana deret konvergen dalam norma $L^2(\mathbf{R})$. (QED)

`Catatan`. Himpunan bilangan $\{f(\frac{k\pi}{T})\}_{k \in \mathbf{Z}}$ disebut *sampel*. Teorema di atas mengatakan bahwa f dapat direkonstruksi dari sampel tersebut dengan menggunakan keluarga fungsi

$\left\{\frac{\sin(Tx-k\pi)}{Tx-k\pi}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Hal ini sebetulnya tidaklah mengejutkan, karena $s_k(x) = \frac{\sin(Tx-k\pi)}{Tx-k\pi}$, yang merupakan invers transformasi Fourier dari $\widehat{s}_k(\xi) = \chi_{[-T,T]}(\xi)e^{-i\pi k\xi/T}$, membentuk basis ortogonal untuk $\{f \in L^2(\mathbf{R}) \,|\, \mathrm{supp}\widehat{f} \subseteq [-T,T]\}$. Berdasarkan fakta ini dan kesamaan Parseval, kita peroleh $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \|s_k\|^{-2}\langle f, s_k\rangle s_k = \frac{T}{\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle \widehat{f}, \widehat{s}_k\rangle s_k = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{k\pi}{T}\right)s_k$.

12.4 Ketaksamaan Heisenberg

Jika $f(t)$ menyatakan sinyal dengan supp $\widehat{f} \subseteq [-T,T]$ untuk suatu $T > 0$, maka f dikatakan mempunyai frekuensi terbatas (*band-limited*). Ketaksamaan Heisenberg yang akan kita bahas di sini menyatakan bahwa f dan $\widehat{f}$ tidak mungkin sama-sama mempunyai tumpuan (*support*) yang terbatas, kecuali $f \equiv 0$. Dalam perkataan lain, f tidak mungkin mempunyai waktu dan frekuensi terbatas. Secara intuitif, ini sama saja dengan mengatakan bahwa f dan $\widehat{f}$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan: jika f terkonsentrasi di sekitar suatu titik, maka $\widehat{f}$ mestilah tersebar pada $\mathbf{R}$; dan sebaliknya.

Untuk melihat fakta ini secara kuantitatif, definisikan *dispersi* f di sekitar $x = a$ sebagai

$$\Delta_a f := \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2|f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx}.$$

Di sini $\Delta_a f$ merupakan suatu ukuran seberapa besar f tersebar menjauhi a. Jika nilai f terkonsentrasi di sekitar a, maka faktor $(x-a)^2$ akan membuat pembilang pada $\Delta_a f$ lebih kecil daripada penyebutnya, sehingga $\Delta_a f < 1$. Namun, jika nilai f tersebar jauh dari a, maka pembilang pada $\Delta_a f$ lebih besar daripada penyebutnya, sehingga $\Delta_a f > 1$. Semakin besar nilai $\Delta_a f$, semakin tersebar f jauh dari a.

Teorema (Ketaksamaan Heisenberg) Untuk setiap $f \in L^2$, dan untuk setiap $a, \alpha \in \mathbf{R}$, berlaku

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

Bukti. Asumsikan f kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $\mathbf{R}$, dan $xf(x)$ serta $f'(x)$ di L^2. (Jika $xf(x) \notin L^2$, maka $\Delta_a f = \infty$; sementara jika $f'(x) \notin L^2$, maka $\Delta_\alpha \widehat{f} = \infty$.) Tunjau kasus $a, \alpha = 0$ terlebih dahulu. Dengan pengintegralan parsial, kita peroleh

$$\int_A^B x\overline{f(x)}f'(x)\,dx = x|f(x)|^2\Big|_A^B - \int_A^B (|f(x)|^2 + xf(x)\overline{f'(x)})\,dx,$$

atau

$$\int_A^B |f(x)|^2 dx = -2\mathrm{Re}\int_A^B \overline{xf(x)}f'(x)\,dx + x|f(x)|^2\Big|_A^B,$$

untuk $-\infty < A < B < \infty$. Karena $f(x), xf(x)$, dan $f'(x)$ di L^2, limit kedua integral di atas ada untuk $A \to -\infty$ dan $B \to \infty$. Karena itu, limit $A|f(A)|^2$ dan $B|f(B)|^2$ juga ada, dan mestilah bernilai 0 (karena bila tidak, maka $|f(x)| \sim |x|^{-1/2}$ untuk $|x| >> 1$, bertentangan dengan asumsi bahwa $f \in L^2$). Akibatnya, kita peroleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{xf(x)}f'(x)\,dx.$$

Dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita dapatkan

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\Big)^2 \le 4\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx\Big).$$

Berdasarkan kesamaan Plancherel, $\int |f|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int |\widehat{f}|^2 d\xi$, sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |(f')\widehat{\ }(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dengan demikian kita peroleh

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big) \le 4\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|f(\xi)|^2 d\xi\Big).$$

Ini membuktikan bahwa $(\Delta_0 f)(\Delta_0\widehat{f}) \ge \frac{1}{4}$.

Untuk kasus $a, \alpha \in \mathbf{R}$ sembarang, misalkan $F(x) := e^{-i\alpha x}f(x+a)$. Maka F memenuhi hipotesis teorema selama f memenuhi, $\Delta_a f = \Delta_0 F$ dan $\Delta_\alpha \widehat{f} = \Delta_0\widehat{F}$. Jadi

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha\widehat{f}) = (\Delta_0 F)(\Delta_0\widehat{F}) \ge \frac{1}{4},$$

sebagaimana diharapkan. (QED)

13.5 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}K_1\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big)$ dan $P_y(x) = \frac{1}{y}P_1\big(\frac{x}{y}\big)$ masing-masing membentuk identitas hampiran.
2. Dengan menggunakan transformasi Fourier, buktikan bahwa solusi persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = g(x)$ adalah
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy.$$
3. Verifikasi Teorema Sampling Shannon berdasarkan catatan di akhir bagian 12.3.
4. Buktikan jika $xf(x) \notin L^2$, maka $\Delta_a f = \infty$.