14. Transformasi Fourier dan Masalah Sturm-Liouville

Pada bagian ini kita akan mempelajari transformasi Fourier dan masalah Sturm-Liouville pada setengah garis. Namun, sebelum kita sampai di sana, mari kita tinjau kembali persamaan panas pada $(-\infty, \infty)$:

$$u_t = ku_{xx}.$$

Bila kita misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$, maka kita peroleh

$$X'' + \xi^2 X = 0 \quad \text{dan} \quad T' = -\xi^2 kT,$$

dengan ξ^2 merupakan konstatan pemisahnya. Dari kedua persamaan ini, kita akan mendapatkan bahwa untuk $-\infty < \xi < \infty$, fungsi $e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x}$ merupakan solusi. Dengan prinsip superposisi, kita peroleh solusi persamaan panas

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi.$$

Jika diketahui syarat awal $u(x,0) = f(x)$, maka dari rumus inversi Fourier kita simpulkan bahwa $C(\xi) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(\xi)$, sehingga

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi,$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya pada Bab 13.

14.1 Masalah Sturm-Liouville

Apa yang akan kita bahas sekarang adalah masalah Sturm-Liouvile singular:

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Solusi umum persamaan ini adalah

$$C_1 e^{i\xi x} + C_2 e^{-i\xi x}, \quad \text{untuk } \xi \neq 0;$$

atau

$$C_1 + C_2 x, \quad \text{untuk } \xi = 0.$$

Tak satupun di antara fungsi ini merupakan anggota $L^2(\mathbf{R})$, kecuali untuk kasus trivial $C_1 = C_2 = 0$. jadi tidak ada kemungkinan untuk menemukan basis ortonormal dari keluarga fungsi eigen ini.

Sebagai gantinya, dengan menggunakan rumus inversi Fourier, kita dapat menyatakan setiap fungsi $f \in L^2(\mathbf{R})$ sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x} + \widehat{f}(-\xi)e^{-i\xi x}\right] d\xi, \quad (*)$$

dengan interpretasi yang sesuai terhadap integral tersebut.

Perlu dijelaskan di sini mengapa hanya $\xi \in \mathbf{R}$ yang muncul. Jika $Im(\xi) \neq 0$, maka $|e^{i\xi x}| \to \infty$ untuk $|x| \to \infty$. Jadi $e^{i\xi x}$ tidak cocok bila dipandang dengan kacamata ruang $L^2(\mathbf{R})$ Jika $\xi \in \mathbf{R}$, maka $e^{i\xi x} \notin L^2$ tetapi masih cukup dekat dari $L^2(\mathbf{R})$, sehingga masih dapat dipakai sebagai fungsi eigen untuk merekonstruksi f seperti dalam (*).

Berdasarkan (*), mari kita tinjau dua masalah Sturm-Liouville berikut pada setengah garis $[0, \infty)$:

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad X'(0) = 0; \qquad (1)$$

$$X'' + \xi^2 X = 0, \quad X(0) = 0. \qquad (2)$$

Solusi (1) adalah kelipatan $\cos \xi x$, sementara solusi (2) adalah kelipatan $\sin \xi x$. Kedua fungsi ini bukan anggota $L^2(0, \infty)$, jadi tidak ada basis ortonormal dari keluarga fungsi ini. Namun, kita bisa mencari rumus integral berikut:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\xi) \cos \xi x d\xi, \qquad (3)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\xi) \sin \xi x d\xi, \qquad (4)$$

untuk $f \in L^2(0, \infty)$.

Jika $f \in L^1(\mathbf{R})$ dan f merupakan fungsi genap, maka

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos \xi x - i \sin \xi x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx = 2\int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx. \qquad (5a)$$

Jadi $\widehat{f}$ juga genap, dan rumus inversi Fourier menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)(\cos \xi x + i \sin \xi x)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \cos \xi x \, d\xi. \qquad (5b)$$

Dengan cara yang serupa, jika f merupakan fungsi ganjil, maka $\widehat{f}$ juga ganjil dan

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \xi x \, dx; \qquad (6a)$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \sin \xi x \, d\xi. \qquad (6b)$$

Rumus-rumus ini hanya melibatkan nilai f dan $\widehat{f}$ pada $[0, \infty)$, jadi domain f dan $\widehat{f}$ dapat dibatasi pada $[0, \infty)$.

14.2 Transformasi Cosinus Fourier dan Transformasi Sinus Fourier

Misalkan $f \in L^1(0, \infty)$. *Transformasi cosinus Fourier* dan *transformasi sinus Fourier* dari f didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) := \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \xi x \, dx;$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) := \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \xi x \, dx.$$

Dari perhitungan di atas, kita peroleh rumus inversinya:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathcal{F}_c[f](\xi) \cos \xi x \, d\xi;$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathcal{F}_s[f](\xi) \sin \xi x \, d\xi;$$

Di sini, integral mesti ditafsirkan secara pas. Misalnya, jika f kontinu bagian demi bagian pada $(0, \infty)$, maka

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \mathcal{F}_c[f](\xi) \cos \xi x \, d\xi = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)].$$

Teorema (Kesamaan Plancherel). Jika $f, \mathcal{F}_c[f]$ dan $\mathcal{F}_s[f]$ merupakan anggota $L^1 \cap L^2(0, \infty)$, maka

$$\|F_c[f]\|^2 = \|\mathcal{F}_s[f]\|^2 = \frac{\pi}{2}\|f\|^2.$$

Bukti. Perluas f menjadi f_{genap} dan f_{ganjil} yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$. Maka $\mathcal{F}_c[f]$ dan $\mathcal{F}_s[f]$ adalah pembatasan dari $\frac{1}{2}\widehat{f}_{\text{genap}}$ dan $\frac{i}{2}\widehat{f}_{rmganjil}$ pada $(0,\infty)$, sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\mathcal{F}_c[f](\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{4}\int_0^\infty |\widehat{f}_{\text{genap}}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}_{\text{genap}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^\infty |f_{\text{genap}}|^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty |f(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Serupa dengan itu, kita juga mempunyai

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_s[f](\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty |f(x)|^2 dx.$$

Dengan demikian kesamaan Plancerel terbukti. (QED)

`Catatan`. Sebagai akibat dari kesamaan Plancherel, kedua rumus inversi Fourier di atas berlaku pula untuk $f \in L^2(0,\infty)$.

14.3 Aplikasi pada Persamaan Panas

Sebagai aplikasi dari transformasi Fourier Cosinus Fourier, tinjau persamaan panas pada $(0,\infty)$:

$$u_t = ku_{xx}, \quad x,t > 0,$$

dengan syarat batas $u_x(0,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Metode pemisahan peubah dan syarat batas akan memberikan solusi $e^{-\xi^2 kt}\cos\xi x$ untuk $\xi > 0$, sehingga kita peroleh

$$u(x,t) = \int_0^\infty C(\xi)e^{-\xi^2 kt}\cos\xi x\, d\xi.$$

Substitusikan $t = 0$, kita dapatkan

$$f(x) = \int_0^\infty C(\xi)\cos\xi x\, d\xi.$$

Jadi $C(\xi) = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}_c[f](\xi)$, sehingga kita peroleh solusi dalam bentuk*integral Fourier*:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](\xi)e^{-\xi^2 kt}\cos\xi x\, d\xi. \qquad (**)$$

Selanjutnya, dapat diperiksa bahwa

$$e^{-\xi^2 kt} = \mathcal{F}_c[g_t](\xi)$$

dengan

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Jadi persamaan (**) dapat ditulis ulang sebagai

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) \cos \xi x \, d\xi.$$

Namun, dapat dibuktikan jika F dan G_t adalah perluasan genap dari f dan g_t pada $\mathbf{R}$, maka $(F * G_t)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{F}\widehat{G}_t$ setara dengan

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) = \mathcal{F}_c[h],$$

dengan $2h$ merupakan pembatasan dari $F * G_t$ pada $(0, \infty)$. Dari sini kita simpulkan bahwa

$$u(x,t) = \frac{1}{2} F * G_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty f(y) \big[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \big] \, dy.$$

Dapat diperiksa bahwa $u(x,t) \to f(x)$ bila $t \to 0^+$.

14.4 Soal Latihan

1. Buktikan jika F dan G_t adalah perluasan genap dari f dan g_t pada $\mathbf{R}$, maka rumus $(F * G_t)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{F}\widehat{G}_t$ setara dengan

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) \mathcal{F}_c[g_t](\xi) = \mathcal{F}_c[h],$$

   dengan $2h$ merupakan pembatasan dari $F * G_t$ pada $(0, \infty)$.

2. Misalkan F adalah fungsi genap yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ dan $u = u(x,t)$ adalah solusi persamaan panas pada $\mathbf{R}$:

$$u_t = k u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

   dengan syarat awal $u(x,0) = F(x)$. Buktikan bahwa $v = u(x,t)|_{x>0}$ adalah solusi persamaan panas pada $(0, \infty)$:

$$u_t = k u_{xx}, \quad x, t > 0,$$

   dengan syarat batas $u_x(0,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$, di mana f adalah pembatasan F pada $(0, \infty)$.