15. Wavelet

Pada Bab 8 kita membahas bahwa $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(-\pi,\pi)$ yang berkaitan dengan deret Fourier klasik pada $L^2(-\pi,\pi)$. Bila kita mundur ke Bab 4, maka kita juga mempunyai basis ortonormal $\{e^{2\pi inx}\}$ untuk $L^2(0,1)$.

15.1 Menengok Kembali Basis Haar

Pada Bab 9, kita juga telah melihat bahwa himpunan fungsi $H := \{h_0\} \cup \{h_{jk} : j \geq 0, 0 \leq k < 2^j\}$, dengan

$$h_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya;} \end{cases}$$

dan

$$h_{jk}(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}k < x < 2^{-j}(k+1/2), \\ -2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}(k+1/2) < x < 2^{-j}(k+1), \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

merupakan basis ortonormal untuk $L^2(0,1)$. Basis ini pertama kali diperkenalkan oleh Haar (1910) dan sekarang dikenal sebagai *basis Haar*.

Sekitar 80 tahun kemudian, peneliti menyadari bahwa basis Haar termasuk apa yang sekarang dinamakan sebagai *wavelet*. Fungsi $h_0(x)$ disebut *fungsi skala Haar* dan fungsi $h_{00}(x)$ disebut *wavelet Haar*.

Perhatikan dua operasi dasar yang dilakukan terhadap $h_{00}(x)$ untuk memperoleh $h_{10}(x) = h_{00}(2x)$ dan $h_{11}(x) = h_{00}(2x-1)$, yakni *dilasi* dan *translasi*. Anggota basis selanjutnya juga diperoleh dengan dua operasi ini. Jadi, basis Haar adalah keluarga fungsi

$$h_0(x), \text{ plus } h_{jk}(x) = 2^{j/2}h_{00}(2^jx-k), \ j = 0,1,2,\ldots, \ k = 0,1,\ldots,2^j-1.$$

Basis ini dapat diperluas sehingga menjadi basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, sebagaimana akan kita lihat nanti.

Bila kita bekerja dengan, misalnya, fungsi tangga, menggunakan basis ini tentunya akan lebih menguntungkan. Lebih daripada itu, ketika kita memakai komputer untuk perhitungan, basis Haar terasa lebih efisien karena bekerja dalam sistem biner seperti halnya komputer. Keuntungan yang lebih esensial menggunakan basis Haar adalah bahwa basis ini dapat dipakai untuk menganalisis frekuensi dan waktu secara simultan, suatu hal yang tidak dapat dilakukan dengan baik oleh deret atau transformasi Fourier (karena adanya ketaksamaan Heisenberg).

Walaupun basis ortonormal Haar telah dikenal sejak awal abad ke-20, teori wavelet baru berkembang dalam 20-25 tahun terakhir ini. Kini wavelet mulai menggeser peran deret Fourier dalam berbagai aplikasi.

15.2 Wavelet Ortonormal

Materi berikut disadur dari buku "A First Course on Wavelets" karangan E. Hernandez & G. Weiss (CRC Press).

Sebagaimana disinggung di atas, basis Haar dapat diperluas menjadi basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Persisnya, misalkan

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{jika } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0, & \text{jika } x < 0 \text{ atau } x \ge 1. \end{cases}$$

Maka, $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ j,k \in \mathbf{Z}$, membentuk basis ortonormal Haar untuk $L^2(\mathbf{R})$.

Beberapa anggota basis ini berbentuk sebagai berikut:

Keortonormalannya mudah diperiksa, tetapi kelengkapannya perlu dibuktikan dengan cermat. Semuanya akan menjadi jelas pada saat kita membahas konsep *analisis multi resolusi* nanti.

Periksa bahwa jika kita membatasi diri bekerja pada $[0,1]$, maka

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ j = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$$

plus

$$\phi(x) = 1$$

merupakan basis Haar untuk $L^2(0,1)$, yang telah kita bahas sebelumnya. (Peran $\psi_{j,k}$ yang lainnya dalam hal ini dimainkan oleh ϕ.)

Selanjutnya, kita akan lebih banyak bekerja di $L^2(\mathbf{R})$. Fungsi $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ disebut *wavelet ortonormal* atau singkatnya *wavelet* pada $\mathbf{R}$. Selain wavelet Haar, kita mempunyai contoh wavelet lainnya.

Contoh 1. Misalkan

$$\psi(x) = \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}.$$

Maka, $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$, membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Basis ini dikenal sebagai *basis wavelet sinc* atau *wavelet Shannon.*

Menggunakan teorema inversi Fourier kita dapat menunjukkan bahwa $\widehat{\psi}(\xi) = \chi_I(\xi)$ dengan $I = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$. Bahwa ψ sungguh merupakan wavelet ortonormal pada $\mathbf{R}$ dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Pertama kita selidiki keortonormalannya. Perhitungan sederhana akan menghasilkan

$$\widehat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-i2^{-j}\xi k}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi).$$

Untuk $j \neq l$, fakta di atas menunjukkan bahwa $\mathrm{supp}(\widehat{\psi}_{j,k}) \cap \mathrm{supp}(\widehat{\psi}_{l,m})$ berukuran nol; sehingga

$$2\pi\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m}\rangle = \langle \widehat{\psi}_{j,k}, \widehat{\psi}_{l,m}\rangle = 0,$$

untuk sebarang $k, m \in \mathbf{Z}$. Sementara itu, untuk $j = l$ dan $k, m \in \mathbf{Z}$ sembarang, kita mempunyai

$$\begin{aligned}2\pi\langle\psi_{j,k},\psi_{j,m}\rangle &= 2^{-j}\int_{\mathbf{R}} e^{i2^{-j}\xi(m-k)}|\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i\zeta(m-k)}d\zeta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\zeta(m-k)}d\zeta \\ &= 2\pi\delta_{k,m}.\end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa keluarga fungsi $\{\psi_{j,k}\}$ lengkap, kita periksa kesamaan Parseval. Berdasarkan kesamaan Plancherel untuk transformasi Fourier kita mempunyai

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{-j}\Big|\int_{\mathbf{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i2^{-j}\xi k}\overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)}\,d\xi\Big|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^j\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big|\int_I \widehat{f}(2^j\zeta)\frac{e^{i\zeta k}}{\sqrt{2\pi}}d\zeta\Big|^2.\end{aligned}$$

Mengingat $\{\frac{e^{i\zeta k}}{\sqrt{2\pi}} : k\in\mathbf{Z}\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk $L^2(I)$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}2^j\int_I|\widehat{f}(2^j\zeta)|^2d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}}\chi_I(2^{-j}\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi_I(2^{-j}\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

karena $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\chi_I(2^{-j}\xi) = 1$ hampir untuk setiap $\xi\in\mathbf{R}$.

Dengan demikian, $\{\psi_{j,k}\}$ ortonormal dan lengkap di $L^2(\mathbf{R})$, sehingga ψ merupakan suatu wavelet ortonormal pada $\mathbf{R}$.

Teorema di bawah ini memberikan syarat perlu dan cukup untuk keortonormalan keluarga fungsi $\psi_{j,k},\ j,k\in\mathbf{Z}$. Untuk buktinya, lihat Hernandez & Weiss.

Teorema (Syarat perlu dan cukup untuk keortonormalan). *Misalkan* $\psi\in L^2(\mathbf{R})$. *Maka* $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k),\ j,k\in\mathbf{Z}$ *membentuk keluarga ortonormal jika dan hanya jika*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{h.d.m.} \tag{2.1}$$

dan

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))\overline{\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)} = 0 \quad \text{h.d.m}, \ j \in \mathbf{N}. \tag{2.2}$$

Persyaratan (3.1) dan (3.2) tidak menjamin bahwa $\{\psi_{j,k}\}$ lengkap. Teorema di bawah ini memberikan kriteria kelengkapan keluarga ortonormal $\{\psi_{j,k}\}$.

Teorema (Kriteria kelengkapan suatu keluarga ortonormal). *Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga supp $\widehat{\psi} \subseteq I$ untuk suatu selang terbatas $I \subseteq \mathbf{R}$ dan $\widehat{\psi}$ bernilai 0 pada suatu lingkungan di sekitar 0. Misalkan $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k),\ j,k \in \mathbf{Z}$ membentuk keluarga ortonormal. Maka, $\{\psi_{j,k}\}$ lengkap jika dan hanya jika*

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \quad \text{h.d.m.} \tag{2.3}$$

dan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^j(\xi+2k\pi))} = 0 \quad \text{h.d.m}, \ k \in 2\mathbf{Z}+1. \tag{2.4}$$

Dapat diperiksa dengan mudah bahwa wavelet Shannon memenuhi (2.1) dan (2.3).

15.3 Basis Ortonormal yang Dibangun oleh Sebuah Fungsi

Seperti telah kita lihat di atas, dari sebuah wavelet kita dapat memperoleh suatu basis ortonormal. Cara lain untuk memperoleh suatu basis ortonormal dari sebuah fungsi adalah dengan melibatkan translasi dan *modulasi*.

Sebagai contoh, suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ dapat dikonstruksi sebagai berikut. Kita sudah mengenal basis ortonormal $\{e^{2\pi imx}\}$ untuk $L^2(0,1)$. Sekarang, jika kita definisikan

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx}g(x-n), \quad m,n \in \mathbf{Z},$$

dengan $g = \chi_{[0,1)}$, maka tidak terlalu sulit bagi kita untuk menunjukkan bahwa $\{g_{m,n} : m,n \in \mathbf{Z}\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Basis semacam ini digunakan oleh D. Gabor (1946) untuk menangani persoalan dalam komunikasi.

Teorema di bawah ini memberikan suatu syarat perlu yang harus dipenuhi oleh $g \in L^2(\mathbf{R})$ agar $\{g_{m,n} : m,n \in \mathbf{Z}\}$ membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$.

Teorema (Balian-Low). Misalkan $g \in L^2(\mathbf{R})$ dan

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi i m x} g(x-n), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Jika $\{g_{m.n} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ membentuk suatu basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, maka

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \quad \text{atau} \quad \int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty.$$

Bukti. Lihat Hernandez & Weiss.

Contoh 2. $g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ memenuhi syarat perlu teorema Balian-Low. Dalam hal ini, integral pertama yang tak terhinga.

Contoh 3. $g = \chi_{[0,1)}$ juga memenuhi syarat perlu teorema Balian-Low. Dalam hal ini, integral kedua yang tak terhingga.

Sebagai akibat dari teorema Balian-Low, kita tidak mungkin menemukan fungsi g yang cukup mulus dan mempunyai *tumpuan* kompak sedemikian sehingga $\{e^{2\pi i m x} g(x-n)\}$ membentuk basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$, karena kedua integral di atas akan bernilai terhingga. Namun demikian, secara lokal, kita dapat mencari g yang cukup mulus dan mempunyai tumpuan kompak sedemikian sehingga $\{e^{2\pi i m x} g(x)\}$ membentuk sistem ortonormal. Fungsi g demikian disebut *fungsi bel*.

15.4 Soal Latihan

1. Misalkan $\psi(x) = \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}$ dan $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Buktikan bahwa
   (a) $\widehat{\psi}(\xi) = \chi_I(\xi)$ dengan $I = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$.
   (b) $\widehat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-i2^{-j}\xi k} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi)$.
2. Buktikan bahwa wavelet Shannon yang dibahas pada §15.2 memenuhi syarat perlu (2.1) dan (2.3).
2. Periksa bahwa $g(x) = \chi_{[0,1)}$ memenuhi syarat perlu teorema Balian-Low.