# 16. Analisis Multi Resolusi

Esensi dari basis ortonormal yang dibangun oleh sebuah wavelet adalah sifat *multi resolusi*-nya, sehingga kita dapat menganalisis suatu signal pada berbagai frekuensi di suatu lokasi tertentu.

Di bawah ini kita akan membahas apa yang dimaksud dengan *analisis multi resolusi* dan, pada pasal berikutnya, bagaimana kita dapat mengkontruksi sebuah wavelet dari suatu analisis multi resolusi.

## 16.1 Analisis Multi Resolusi

Keluarga subruang tertutup $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ dari $L^2(\mathbf{R})$ yang memenuhi

(a) $V_j \subset V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$;

(b) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$;

(c) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;

(d) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;

(e) terdapat $\phi \in V_0$ sedemikian sehingga $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $V_0$,

disebut *analisis multi resolusi (AMR)* pada $L^2(\mathbf{R})$. Fungsi $\phi$ pada (e) disebut *fungsi skala* dalam AMR tersebut.

**Contoh 1.** Misalkan $V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f \text{ konstan pada } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)),\ k \in \mathbf{Z}\},\ j \in \mathbf{Z}$. Maka, $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ memenuhi sifat (a) s/d (d) di atas. Sekarang misalkan $\phi = \chi_{[0,1]}$. Maka, $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk $V_0$. Oleh karena itu, $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ merupakan suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$.

Untuk ilustrasi, fungsi $f \in V_0$ berbentuk seperti —misalnya

**Teorema**. *Misalkan* $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ *suatu AMR pada* $L^2(\mathbf{R})$. *Maka,*

*(i) Untuk setiap* $j \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_j$;

*(ii) Untuk setiap* $k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0$;

*(iii) Untuk setiap* $j, k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j$;

*(iv) Untuk setiap* $j, k \in \mathbf{Z}$, $f \in V_0 \Rightarrow f(2^j \cdot - k) \in V_j$.

*Bukti.* (i) Gunakan sifat (b) dan induksi.

(ii) Misalkan $f \in V_0$ dan $k \in \mathbf{Z}$. Maka, berdasarkan sifat (e),

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi(\cdot - m) \rangle \phi(x - m),$$

dan karenanya

$$f(x - k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f, \phi(\cdot - m) \rangle \phi(x - k - m).$$

Namun, $\langle f, \phi(\cdot - m) \rangle = \langle f(\cdot - k), \phi(\cdot - k - m) \rangle$. Akibatnya,

$$f(x - k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f(\cdot - k), \phi(\cdot - k - m) \rangle \phi(x - k - m) \in V_0$$

karena $\{\phi(\cdot - m) : m \in \mathbf{Z}\} = \{\phi(\cdot - k - m) : m \in \mathbf{Z}\}$ basis ortonormal untuk $V_0$.

(iii) Gunakan (i) dan (ii).

(iv) Gunakan (i) dan (iii).

**Akibat**. *Misalkan* $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ *suatu AMR pada* $L^2(\mathbf{R})$ *dan* $\phi \in V_0$ *fungsi skala dalam AMR tersebut. Definisikan*

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

*Maka, untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $V_j$.*

*Bukti.* Misalkan $j \in \mathbf{Z}$. Maka, $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal, karena

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,m} \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}} \phi(2^j x - k)\phi(2^j x - m)dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(x-k)\phi(x-m)dx = \delta_{k,m}.$$

Selanjutnya, misalkan $f \in V_j$. Maka, $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, dan karenanya

$$f(2^{-j}x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f(2^{-j}\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle \phi(x-k).$$

Substitusi $x' = 2^{-j}x$ memberikan

$$f(x') = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k}(x').$$

Ini membuktikan bahwa $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ lengkap. Dengan demikian $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $V_j$.

### 16.2 Konstruksi Wavelet

Misalkan $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$. Misalkan $W_0$ komplemen ortogonal dari $V_0$ relatif terhadap $V_1$, yakni

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Kemudian, untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, definisikan

$$W_j = \{f(2^j\cdot) : f \in W_0\}.$$

Maka,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Karena $V_j \to \{0\}$ untuk $j \to -\infty$, kita peroleh

$$V_{j+1} = \bigoplus_{n=-\infty}^{j} W_n, \quad j \in \mathbf{Z};$$

dan karena $V_j \to L^2(\mathbf{R})$ untuk $j \to \infty$, kita peroleh

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n.$$

Untuk memperoleh wavelet, kita harus mencari $\psi \in W_0$ sedemikian sehingga $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $W_0$. Selanjutnya dapat diperiksa bahwa untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk $W_j$. Dengan demikian, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$ atau $\psi$ adalah wavelet yang diinginkan.

**Contoh 2.** Melanjutkan Contoh 1, wavelet $\psi$ yang kita cari adalah

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \le x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \text{jika } \frac{1}{2} \le x < 1; \\ 0, & \text{jika } x < 0 \text{ atau } x \ge 1. \end{cases}$$

Periksa bahwa $\phi \perp \psi$ dan $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $W_0$. Basis yang dibangun oleh $\psi$ tak lain adalah basis Haar yang dibahas pada Bab 10.

### 16.3 Wavelet Bertumpuan Kompak dan Kemulusannya

Wavelet Haar merupakan sebuah contoh wavelet yang mempunyai tumpuan kompak, yakni $[0, 1]$. Pada pasal ini kita akan melihat bahwa wavelet bertumpuan kompak tak mungkin merupakan fungsi $C^\infty$; semulus-mulusnya ia hanya dapat merupakan fungsi di $C^n$ untuk suatu $n$ yang terhingga.

**Teorema**. *Misalkan $\psi$ kontinu pada $\mathbf{R}$ dan memenuhi*

$$|\psi(x)| \le \frac{C}{(1 + |x|)^{1+\epsilon}}$$

*untuk suatu $\epsilon > 0$. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka*

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\, dx = 0.$$

*Bukti.* Misalkan $a = 2^{-j_\circ} k_\circ$, suatu bilangan diadik, sedemikian sehingga $\psi(a) \neq 0$. [Karena $\|\psi\|_2 = 1$ dan $\psi$ kontinu, bilangan $a$ demikian dijamin ada.] Berdasarkan hipotesis, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j x - k)dx = 0, \quad (j, k) \neq (0, 0).$$

Dengan mengambil $k = 2^{j-j_\circ}k_\circ$ dengan $j > \text{maks}\{j_\circ, 0\}$, kesamaan di atas menjadi

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j(x-a))dx = 0.$$

Sekarang misalkan $y = 2^j(x-a)$. Maka

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(a+2^{-j}y)}\psi(y)dy = 0.$$

Berdasarkan Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, integral di ruas kiri menuju $\overline{\psi(a)}\int_{\mathbf{R}}\psi(y)dy$ bila $j \to \infty$, sehingga kita peroleh

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(y)dy = 0$$

karena $\psi(a) \neq 0$.

`Catatan.` Teorema di atas dapat diperluas dengan menghapuskan asumsi bahwa $\psi$ kontinu, namun buktinya lebih rumit. Lihat Hernandez & Weiss, Proposisi 3.6.

**Teorema**. *Misalkan $r$ suatu bilangan bulat tak negatif dan $\psi$ sebuah fungsi di $C^r(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga*

$$|\psi(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\epsilon}}$$

*untuk suatu $\epsilon > 0$, dan $\psi^{(m)}$ terbatas pada $\mathbf{R}$ untuk $m = 0, 1, \ldots, r$. Jika $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka*

$$\int_{\mathbf{R}} x^m\psi(x)\,dx = 0,$$

*yakni, momen ke-$m$ dari $\psi$ bernilai 0, untuk $m = 0, 1, \ldots, r$.*

*Bukti.* Lihat Hernandez & Weiss.

**Akibat**. *Misalkan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sebuah fungsi Schwartz sedemikian sehingga $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$. Maka semua momen dari $\psi$ bernilai 0 atau, setara dengan itu, $\frac{d^m\widehat{\psi}}{d\xi^m}(0) = 0$ untuk setiap $m = 0, 1, 2, \ldots$.*

*Bukti.* Jelas, karena setiap fungsi Schwartz merupakan fungsi $C^\infty$ dan memenuhi ketaksamaan pada teorema di atas untuk setiap bilangan bulat tak negatif $r$, dan $\frac{d^m\widehat{\psi}}{d\xi^m}(0) = (-2\pi i)^m\int_{\mathbf{R}} x^m\psi(x)\,dx$ untuk setiap $m = 0, 1, 2, \ldots$.

**Akibat**. *Misalkan* $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ *sebuah fungsi bertumpuan kompak sedemikian sehingga* $C^\infty$. *Maka* $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbf{Z}\}$ *tidak mungkin merupakan himpunan ortonormal di* $L^2(\mathbf{R})$.

*Bukti.* Jika $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2(\mathbf{R})$, maka menurut teorema di atas semua momen dari $\psi$ bernilai 0. Karena itu untuk semua polinom $p(x)$, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} p(x)\overline{\psi(x)}\, dx = 0.$$

Karena $\psi$ bertumpuan kompak, diberikan $\epsilon > 0$ kita dapat menemukan suatu polinom $p(x)$ sedemikian sehingga $\sup_{x\in K} |\psi(x) - p(x)| < \epsilon$, dengan $K$ menyatakan tumpuan $\psi$ (berdasarkan Teorema Aproksimasi Weierstrass). Akibatnya

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 = \int_{\mathbf{R}} \psi(x)\overline{\psi(x)}\, dx &= \int_K [\psi(x) - p(x)]\overline{\psi(x)}\, dx \\ &\le \epsilon \int_K |\psi(x)|\, dx = \epsilon\, \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

Mengingat $\|\psi\|_1 < \infty$ dan $\epsilon > 0$ sebarang, kita haruslah mempunyai $\|\psi\|_2^2 = 0$, yang bertentangan dengan keortonormalan $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbf{Z}\}$.

### 16.4 Teorema Sampling

Teorema di bawah ini merupakan bentuk lain dari Teorema Sampling Shannon yang dibahas pada §12.3.

**Teorema**. *Misalkan* $V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f \text{ konstan pada } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)),\ k \in \mathbf{Z}\},\ j \in \mathbf{Z}$ *dan* $\phi = \chi_{[0,1)}$. *Maka, untuk setiap* $f \in V_j$, *berlaku*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(2^{-j}k)\phi(2^j x - k).$$

*Bukti.* Kita tahu bahwa $\{V_j\}$ merupakan suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$ dan $\phi$ fungsi skala, yakni $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ membentuk basis ortonormal untuk $V_0$. Selanjutnya, keluarga fungsi $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k),\ j,k \in \mathbf{Z}$ membentuk basis ortonormal untuk $V_j$. Karena itu, untuk setiap $f \in V_j$, berlaku

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k},$$

dengan

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi_{j,k} \rangle &= 2^{j/2} \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(2^j x - k) dx \\
&= 2^{j/2} \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x) dx \\
&= 2^{j/2} \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(2^{-j}k) dx \\
&= 2^{-j/2} f(2^{-j}k),
\end{aligned}$$

sesuai dengan yang dinyatakan.

**Teorema**. *Misalkan $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ basis ortonormal yang diperoleh dari wavelet $\psi$. Maka,*

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f * \tilde{\psi}_{j,0})(2^{-j}k)\psi_{j,k}$$

*dalam norma $L^2(\mathbf{R})$. (Di sini, $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$.)*

*Bukti.* Tuliskan

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Namun,

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_{j,k} \rangle &= \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x) 2^{j/2} \overline{\psi(2^j x - k)}\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi_{j,0}(x - 2^{-j}k)}\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\tilde{\psi}_{j,0}(2^{-j}k - x)\, dx \\
&= f * \tilde{\psi}_{j,0}(2^{-j}k).
\end{aligned}$$

Jadi,

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f * \tilde{\psi}_{j,0})(2^{-j}k)\psi_{j,k},$$

seperti yang diinginkan.

### 16.5 Soal Latihan

1. Misalkan $\{V_j\}$ suatu AMR pada $L^2(\mathbf{R})$. Buktikan bahwa $V_{j+1} = V_j \oplus W_j,\ j \in \mathbf{Z}$.

2. Buktikan jika $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $W_0$, maka untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $W_j$.
3. Tunjukkan jika $\psi$ merupakan fungsi $C^\infty$ yang bertumpuan kompak pada $\mathbf{R}$, maka $\psi$ memenuhi ketaksamaan
$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\epsilon}}$$
untuk $r = 0, 1, 2, \ldots$ dan $\epsilon > 0$ sembarang.