17. Transformasi Wavelet Kontinu dan 'Frame'

Pada §16 kita mempelajari basis ortonormal $\{e^{2\pi imx}g(x-n)\}$ dengan $g = \chi_{[0,1)}$. Transformasi

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-n)e^{-2\pi imx}dx, \quad m,n \in \mathbf{Z},$$

dikenal sebagai *transformasi Fourier jendela*. Dalam versi kontinu, transformasi ini beraksi sebagai berikut

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-\tau)e^{-2\pi i\xi x}dx, \quad \xi,\tau \in \mathbf{R}.$$

(ξ menyatakan frekuensi, τ menyatakan waktu.) Transformasi Fourier jendela dapat dipakai untuk menganalisis waktu dan frekuensi suatu signal.

Namun, lebar jendela yang seragam (= supp g) merupakan satu kelemahan transformasi ini. Untuk mengatasi kendala tadi, kita gunakan keluarga fungsi

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \ a,b \in \mathbf{R}, \ a \neq 0,$$

di mana ψ memenuhi persyaratan tertentu (di sini ψ juga disebut *wavelet*, namun berbeda dengan wavelet ortonormal yang dibahas pada §15). Transformasi wavelet dalam hal ini bekerja sebagai berikut

$$f \mapsto |a|^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)}dx, \quad a,b \in \mathbf{R}, \ a \neq 0;$$

dan dalam versi diskrit

$$f \mapsto a_0^{j/2}\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi(a_0^j x - kb_0)}dx, \quad j,k \in \mathbf{Z},$$

untuk suatu $a_0 > 1$ dan $b_0 > 0$ (sebagai contoh ambil, misalnya, $a_0 = 2$ dan $b_0 = 1$).

Salah satu kelebihan transformasi wavelet adalah sifat keluarga fungsi $\psi_{a,b}$ yang mempunyai jendela lebar untuk menganalisis frekuensi rendah dan pada saat yang sama mempunyai jendela sempit untuk menganalisis frekuensi tinggi.

Sebagian besar materi ini disadur dari buku "Ten Lectures on Wavelets" karangan I. Daubechies (SIAM, 1992).

17.1 Kesamaan Resolusi untuk Transformasi Wavelet Kontinu

Untuk selanjutnya, asumsikan bahwa $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga $\|\psi\| = 1$ dan

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty,$$

yang merupakan syarat yang harus dipenuhi oleh ψ untuk menjadi wavelet. (Jika $\psi \in L^1(\mathbf{R})$, maka ψ kontinu. Dalam hal ini syarat di atas akan dipenuhi hanya jika $\widehat{\psi}(0) = 0$, yakni hanya jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx = 0$. Sebaliknya, jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx = 0$ dan, misalnya, $\int_{\mathbf{R}}(1 + |x|)^\alpha |\psi(x)|dx < \infty$ untuk suatu $\alpha > 0$, maka ψ akan memenuhi persyaratan di atas.

Untuk kemudahan notasi, kita tuliskan transformasi wavelet dari f sebagai

$$Wf(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle = |a|^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)}dx.$$

Catat bahwa $|Wf(a,b)| \le \|f\|$ menurut ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

Fungsi f dapat direkonstruksi dari transformasi waveletnya melalui kesamaan resolusi di bawah ini.

Teorema (Kesamaan resolusi) *Untuk setiap $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ berlaku*

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} Wf(a,b)\overline{Wg(a,b)}a^{-2}da\,db = C_\psi \langle f, g\rangle.$$

Bukti. Untuk setiap $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} Wf(a,b)\overline{Wg(a,b)}a^{-2}da\,db = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \Big[\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)|a|^{1/2}e^{2\pi i b\xi}\overline{\widehat{\psi}(a\xi)}d\xi\Big] \times \\ \Big[\int_{\mathbf{R}} \overline{\widehat{g}(\xi')}|a|^{1/2}e^{-2\pi i b\xi'}\widehat{\psi}(a\xi')d\xi'\Big]\, a^{-2}da\,db.$$

Suku pertama dalam kurung siku dapat dipandang sebagai invers transformasi Fourier dari $F_a(\xi) = |a|^{1/2}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$; sementara suku kedua sebagai konjugasi dari invers transformasi Fourier dari $G_a(\xi) = |a|^{1/2}\widehat{g}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$.

Berdasarkan Teorema Fubini dan kesamaan Plancherel, kita peroleh

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} Wf(a,b)\overline{Wg(a,b)}a^{-2}da\,db &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \check{F}_a(b)\overline{\check{G}_a(b)}\,db\,a^{-2}da \\
&= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_a(\xi)\overline{G_a(\xi)}d\xi\ a^{-2}da \\
&= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}|\widehat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi\ |a|^{-1}da \\
&= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2|a|^{-1}da\ \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi \\
&= C_\psi\langle f,g\rangle.
\end{aligned}$$

(Substitusi $\zeta = a\xi$ dilakukan untuk memperoleh C_ψ pada langkah terakhir.)

`Catatan`. Menggunakan kesamaan resolusi di atas, kita dapat merekonstruksi f melalui

$$f(x) = C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} Wf(a,b)\psi_{a,b}(x)a^{-2}da\,db,$$

setidaknya secara lemah.

17.2 $WL^2(\mathbf{R})$ adalah Suatu *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS)

Sebagai kasus khusus dari Kesamaan Resolusi, yaitu ketika $f = g$, kita mempunyai

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx = C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |Wf(a,b)|^2 a^{-2}da\,db.$$

Dalam perkataan lain, W memetakan $L^2(\mathbf{R})$ secara isometrik ke $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1}a^{-2}da\,db)$ (ruang semua fungsi kompleks F pada $\mathbf{R}^2$ dengan $|||F|||^2 = C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |F(a,b)|^2 a^{-2}da\,db < \infty$). $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1}a^{-2}da\,db)$ dengan norma $|||F|||^2 = C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |F(a,b)|^2 a^{-2}da\,db$ merupakan suatu ruang Hilbert. Sementara itu, $WL^2(\mathbf{R}) = \{Wf : f \in L^2(\mathbf{R})\}$ hanya membentuk suatu ruang bagian sejati tertutup dari $L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1}a^{-2}da\,db)$.

Argumentasi berikut menunjukkan bahwa $WL^2(\mathbf{R})$ merupakan suatu RKHS, yakni $F(a,b) = \langle K(a,b,\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1}(a')^{-2}da'\,db')}$ untuk suatu kernel $K(a,b,a',b')$.

Misalkan $F \in WL^2(\mathbf{R})$ dan $f \in L^2(\mathbf{R})$ sedemikian sehingga $Wf = F$. Maka kita mempunyai

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b}\rangle \\
&= C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} Wf(a',b')\overline{W\psi_{a,b}(a',b')}(a')^{-2}da'\,db' \\
&= C_\psi^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} K(a,b;a',b')F(a',b')(a')^{-2}da'\,db' \\
&= \langle K(a,b;\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbf{R}^2; C_\psi^{-1}(a')^{-2}da'db')}
\end{aligned}$$

dengan

$$K(a, b; a', b') = \overline{W\psi_{a,b}(a', b')} = \langle \psi_{a',b'}, \psi_{a,b} \rangle$$

sebagai kernel yang dimaksud.

17.3 Diskritisasi dan Frame

Dalam transformasi wavelet kontinu, kita bekerja dengan keluarga fungsi

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

dengan $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ memenuhi syarat

$$\int_{\mathbf{R}} |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Untuk selanjutnya, demi kemudahan, kita akan mengasumsikan $a > 0$, sehingga syarat yang harus dipenuhi oleh ψ menjadi

$$\int_0^{\infty} |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

dan

$$\int_{-\infty}^{0} |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(Syarat ini lebih kuat daripada syarat sebelumnya.)

Dalam prakteknya, kita hanya membatasi a dan b pada sejumlah diskrit nilai, katakan

$$a = a_0^{-j}, \; b = kb_0a_0^{-j}, \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

untuk suatu $a_0 > 1$ dan $b_0 > 0$ sedemikian sehingga $\psi(x - kb_0), k \in \mathbf{Z}$, 'menutupi' seluruh garis bilangan real. Dalam hal ini kita peroleh keluarga fungsi

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2}\psi\Big(\frac{x - kb_0a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\Big) = a_0^{j/2}\psi(a_0^j x - kb_0), \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

(Perhatikan jika $a_0 = 2$ dan $b_0 = 1$, maka kita dapatkan $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.)

Pertanyaannya sekarang adalah: apakah kita dapat merekonstruksi f dari koefisien-koefisien $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$, $j, k \in \mathbf{Z}$ (yang stabil secara numerik)? Jawabannya tidak selalu ya karena $\psi_{j,k}, j, k \in \mathbf{Z}$, secara umum tidak membentuk basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$. Walaupun demikian, dalam kasus tertentu, dapat kita peroleh jawaban positif.

Secara umum fungsi f dapat direkonstruksi dari $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ apabila

$$\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \langle g, \psi_{j,k}\rangle \quad \forall\, j, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f \equiv g.$$

Namun kita ingin lebih daripada itu: kita ingin dapat merekonstruksi f dari $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ dengan cara yang *stabil secara numerik*.

Pertama, barisan $(\langle f, \psi_{j,k}\rangle)$ harus konvergen untuk setiap $f \in L^2(\mathbf{R})$. Ini tidak menjadi masalah karena pada umumnya kita mempunyai

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu $B > 0$. Kedua, persyaratan kestabilan menghendaki jika $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2$ kecil, maka $\|f\|$ harus kecil pula. Ini berarti bahwa kita harus mempunyai

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu $A > 0$. Jadi, ψ haruslah memenuhi

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

untuk suatu konstanta A dan B dengan $0 < A \le B < \infty$.

Sekarang kita sampai pada definisi *frame*, yang pertama kali diperkenalkan oleh Duffin & Schaeffer (1952) dalam konteks deret Fourier non-harmonik.

Keluarga fungsi $\{\phi_j\}$ dalam ruang Hilbert H disebut *frame* apabila terdapat konstanta A dan B dengan $0 < A \le B < \infty$ sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

Konstanta A dan B disebut *batas* frame yang bersangkutan. Jika kedua konstanta A dan B sama, maka frame yang bersangkutan dikatakan *ketat*.

`Catatan`. Dalam suatu frame yang ketat, kita mempunyai

$$\sum_j |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2, \quad f \in H,$$

sehingga (berdasarkan kesamaan polarisasi)

$$A\langle f, g \rangle = \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \langle \phi_j, g \rangle$$

atau (secara lemah)

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Contoh 1. Sebarang basis ortonormal untuk ruang Hilbert H jelas merupakan suatu frame yang ketat, dengan batas frame $A = B = 1$. Sebaliknya tidak selalu berlaku. Misalkan $H = \mathbf{C}^2$. Keluarga vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ dan $v_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, membentuk suatu frame yang ketat (periksa bahwa untuk setiap $u = (a, b) \in H$ berlaku $\sum_{j=1}^{3} |\langle u, v_j \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|u\|^2$), namun jelas bukan merupakan basis ortonormal untuk H.

Fakta. *Jika $\{\phi_j\}$ suatu frame yang ketat dengan batas frame $A = 1$ dan $\|\phi_j\| = 1$ untuk setiap j, maka $\{\phi_j\}$ merupakan basis ortonormal.*

Bukti. Jelas bahwa $\{\phi_j\}$ lengkap, karena memenuhi kesamaan Plancherel. Selanjutnya kita periksa bahwa untuk setiap k berlaku

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_j |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2 = \|\phi_k\|^4 + \sum_{j \neq k} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2.$$

Karena $\|\phi_k\| = 1$, maka $\langle \phi_j, \phi_k \rangle = 0$ untuk setiap $j \neq k$. Jadi, $\{\phi_j\}$ ortonormal.

17.4 Syarat Perlu dan Syarat Cukup untuk Membentuk Frame

Diberikan wavelet ψ, kita lakukan diskritisasi terhadap ψ untuk memperoleh keluarga fungsi $\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2}\psi(a_0^j x - kb_0)$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Kemudian, untuk setiap $f \in L^2(\mathbf{R})$, kita dapat membuat kode untuk f berupa barisan koefisien $(\langle f, \psi_{j,k} \rangle)$. Jika $\{\psi_{j,k}\}$ membentuk suatu frame yang ketat, maka kita dapat merekonstruksi f dengan cara yang stabil secara numerik melalui

$$f = A^{-1} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Namun, masalahnya, tidak ada jaminan bahwa $\{\psi_{j,k}\}$ membentuk frame (yang ketat).

Syarat perlu bagi $\{\psi_{j,k}\}$ untuk membentuk frame adalah bahwa ψ harus memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet, seperti tersirat dalam teorema di bawah ini.

Teorema (Syarat perlu untuk membentuk frame) *Jika* $\{\psi_{j,k}\}$ *membentuk frame dengan batas frame* A *dan* B*, maka*

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^\infty |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

dan

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B,$$

yakni ψ *memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet.*

Bukti. Lihat Daubechies.

Walaupun ψ memenuhi persyaratan untuk menjadi wavelet, tidak setiap pemilihan a_0 dan b_0 akan menghasilkan frame. Syarat cukup bagi ψ agar $\{\psi_{j,k}\}$ membentuk frame diberikan oleh teorema berikut.

Teorema (Syarat cukup untuk membentuk frame) *Jika* $|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^\alpha (1 + |\xi|)^{-\beta}$ *untuk suatu* $\alpha > 0$ *dan* $\beta > \alpha + 1$*, maka terdapat* a_0 *dan* $b_0 > 0$ *sedemikian sehingga* $\{\psi_{j,k}\}$ *membentuk frame.*

Bukti. Lihat Daubechies.

Contoh 2. Fungsi topi Meksiko

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - x^2) e^{-x^2/2},$$

yang merupakan turunan kedua yang ternormalisasi dari fungsi Gauss $G(x) = e^{-x^2/2}$, dapat menghasilkan suatu frame dengan rasio batas frame $B/A \approx 1$ untuk $a_0 \leq 2^{1/4}$.

Namun, untuk $a_0 = 2$, rasio B/A agak jauh dari 1 seperti yang ditunjukkan oleh tabel di bawah ini (dicuplik dari Daubechies). Ini terjadi karena amplitudo osilasi $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(2^j\xi)|^2$ terlalu besar.

b_0	.25	.50	.75	1.00	1.50
B/A	1.083	1.083	1.083	1.116	12.986

Untuk memperoleh frame yang ketat, kita harus menggunakan sejumlah N wavelet berbeda $\psi^1, \ldots, \psi^N$ (misalnya dengan memilih $\psi^i(x) = 2^{-(i-1)/N}\psi(2^{-(i-1)/N}x)$, $i = 1, \ldots, N$), kemudian bekerja dengan frame $\{\psi^i_{j,k}\}$. (Ini dapat diinterpretasikan sebagai menggunakan N suara per oktaf.) Untuk $N = 3$, misalnya, kita mempunyai tabel di bawah ini (dicuplik dari Daubechies):

b_0	.25	.50	.75	1.00	1.50
B/A	1.000	1.000	1.000	1.010	1.947

17.5 Soal Latihan

1. Misalkan $\psi \in L^1(\mathbf{R})$. Tunjukkan bahwa $\widehat{\psi}(0) = 0$ jhj $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx = 0$. Apa interpretasi anda tentang ψ dalam hal ini?
2. Tunjukkan jika $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx = 0$ dan $\int_{\mathbf{R}}(1 + |x|)^\alpha |\psi(x)|dx < \infty$ untuk suatu $\alpha > 0$, maka $\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2|\xi|^{-1}d\xi < \infty$.
3. Tunjukkan bahwa $\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2|a|^{-1}da = \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2|\zeta|^{-1}d\zeta$. (Gunakan substitusi $\zeta = a\xi$.)
4. Turunkan/peroleh syarat yang harus dipenuhi oleh ψ untuk menjadi wavelet dalam hal $a > 0$, yakni
$$\int_0^\infty |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^0 |\xi|^{-1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$
5. Misalkan $\{\phi_j\}$ merupakan frame yang ketat di ruang Hilbert H, yakni
$$A\|f\|^2 = \sum_j |\langle f, \phi_j\rangle|^2, \quad \forall\, f \in H.$$

Buktikan *ketaksamaan polarisasi*:

$$A\langle f, g\rangle = \sum_j \langle f, \phi_j\rangle\langle \phi_j, g\rangle, \quad \forall\, f, g \in H.$$

6. Tunjukkan bahwa keluarga vektor $\{(0,1), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}$ membentuk suatu frame yang ketat di $\mathbf{C}^2$.
7. Diketahui fungsi Gauss $G(x) = e^{-x^2/2}$, tentukan $G''(x)$, $\|G''\|$, dan $\psi(x) = \frac{G''(x)}{\|G''\|}$.