18. Lebih Jauh tentang 'Frame'

Materi pada bab ini juga disadur dari buku "Ten Lectures on Wavelets" karangan I. Daubechies (SIAM, 1992).

18.1 Operator Frame

Misalkan H ruang Hilbert dan $\{\phi_j\}_{j\in J}$ suatu frame di H, yakni terdapat $A, B \in \mathbf{R}$ dengan $0 < A \leq B < \infty$ sedemikian sehingga

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

Kita definisikan operator frame F sebagai berikut: Operator F yang memetakan setiap fungsi $f \in H$ ke barisan $(\langle f, \phi_j\rangle)_{j\in J} \in l^2(J)$, yakni $F : f \mapsto Ff$ dengan

$$(Ff)_j = \langle f, \phi_j\rangle, \quad j \in J,$$

disebut *operator frame* pada H.

Misalkan F suatu operator frame pada H. Jelas bahwa F merupakan operator linear. F juga terbatas dengan $|||F||| \leq B^{1/2}$, karena

$$\|Ff\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in H.$$

(Di sini $|||F|||$ menyatakan *norma operator* F, yang nilainya sama dengan konstanta C terkecil yang memenuhi $\|Ff\| \leq C\|f\|,\ f \in H$.) Selanjutnya, operator adjoint F, yakni F^*, dapat diperoleh sebagai berikut. Misalkan $c = (c_j) \in l^2(J)$. Maka

$$\begin{aligned}\langle F^*c, f\rangle = \langle c, Ff\rangle &= \sum_{j\in J} c_j \overline{\langle f, \phi_j\rangle} \\ &= \sum_{j\in J} c_j \langle \phi_j, f\rangle = \langle \sum_{j\in J} c_j\phi_j, f\rangle\end{aligned}$$

Jadi, $F^*c = \sum_{j\in J} c_j\phi_j$, setidaknya secara lemah. Selanjutnya, mengingat $|||F^*||| = |||F|||$ (lihat Kreyszig) dan $|||F||| \leq B^{1/2}$, kita peroleh

$$\|F^*c\| = |||F^*|||\,\|c\| = |||F|||\,\|c\| \leq B^{1/2}\|c\|, \quad c \in l^2(J).$$

Sekarang tinjau operator F^*F, yang bekerja pada H sebagai berikut:

$$F^*Ff = F^*(\langle f, \phi_j\rangle) = \sum_{j\in J} \langle f, \phi_j\rangle \phi_j, \quad f \in H.$$

Teorema. *Misalkan* $\mathbf{I}$ *menyatakan operator identitas pada* H*. Maka,*

$$A\mathbf{I} \leq F^*F \leq B\mathbf{I},$$

sehingga F^*F *mempunyai invers, dan*

$$B^{-1}\mathbf{I} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathbf{I}.$$

Bukti. Untuk setiap $f \in H$, kita mempunyai

$$\sum_{j\in J} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 = \|Ff\|^2 = \langle Ff, Ff\rangle = \langle F^*Ff, f\rangle,$$

oleh karena itu,

$$A\mathbf{I} \leq F^*F \leq B\mathbf{I}.$$

Selanjutnya, karena $A > 0$, maka F^*F mempunyai invers, dan

$$B^{-1}\mathbf{I} \leq (F^*F)^{-1} \leq A^{-1}\mathbf{I}$$

(lihat Daubechies untuk detilnya). (QED)

18.2 Frame Dual

Keluarga $\{\tilde{\phi}_j\}_{j\in J}$, dengan

$$\tilde{\phi}_j = (F^*F)^{-1}\phi_j, \quad j \in J,$$

disebut *frame dual* dari $\{\phi_j\}_{j\in J}$.

Teorema di bawah ini menunjukkan bahwa $\{\tilde{\phi}_j\}_{j\in J}$ sungguh membentuk frame.

Teorema. *$\{\tilde{\phi}_j\}_{j\in J}$ merupakan frame dengan batas frame B^{-1} dan A^{-1}.*

Bukti. Jelas bahwa F^*F self-adjoint, sehingga $\big((F^*F)^{-1}\big)^* = (F^*F)^{-1}$. Akibatnya, untuk setiap $f \in H$, kita mempunyai

$$\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle = \langle f, (F^*F)^{-1}\phi_j\rangle = \langle (F^*F)^{-1}f, \phi_j\rangle.$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle|^2 &= \sum_{j\in J} |\langle (F^*F)^{-1}f, \phi_j\rangle|^2 = \|F(F^*F)^{-1}f\|^2 \\ &= \langle F(F^*F)^{-1}f, F(F^*F)^{-1}f\rangle \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, (F^*F)(F^*F)^{-1}f\rangle \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, f\rangle.\end{aligned}$$

Jadi, mengingat $B^{-1}\mathbf{I} \le (F^*F)^{-1} \le A^{-1}\mathbf{I}$, kita peroleh

$$B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle|^2 \le A^{-1}\|f\|^2,$$

sesuai dengan yang diharapkan. (QED)

Teorema. *Operator frame $\tilde{F}$ yang memetakan setiap fungsi $f \in H$ ke barisan $(\langle f, \tilde{\phi}_j\rangle)_{j\in J}$ di $l^2(J)$ memenuhi*

(a) $\tilde{F} = F(F^*F)^{-1}$;

(b) $\tilde{F}^*\tilde{F} = (F^*F)^{-1}$;

(c) $\tilde{F}^*F = \mathbf{I} = F^*\tilde{F}$;

(d) $\tilde{F}F^* = F\tilde{F}^*$ merupakan operator proyeksi ortogonal terhadap $R(F) = R(\tilde{F})$ di $l^2(J)$.

Bukti. Latihan.

18.3 Skema Rekonstruksi

Perhatikan bahwa $\tilde{F}^*F = \mathbf{I} = F^*\tilde{F}$ berarti

$$\tilde{F}^*Ff = f = F^*\tilde{F}f, \quad f \in H,$$

yakni

$$\sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle\tilde{\phi}_j = f = \sum_{j\in J}\langle f,\tilde{\phi}_j\rangle\phi_j, \quad f\in H.$$

Ini berarti kita dapat merekonstruksi f dari $(\langle f,\phi_j\rangle)$ melalui kesamaan

$$f = \sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle(F^*F)^{-1}\phi_j.$$

Jika $A\approx B$, maka $F^*F\approx \frac{A+B}{2}\mathbf{I}$, sehingga $(F^*F)^{-1}\approx\frac{2}{A+B}\mathbf{I}$ dan $\tilde{\phi}_j\approx\frac{2}{A+B}\phi_j$ untuk setiap $j\in J$. Oleh karena itu, $f\approx\frac{2}{A+B}\sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle\phi_j$. Tepatnya,

$$f = \frac{2}{A+B}\sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle\phi_j + Ef,$$

dengan

$$E = \mathbf{I} - \frac{2}{A+B}F^*F.$$

Mengingat $A\mathbf{I}\le F^*F\le B\mathbf{I}$, kita peroleh

$$-\frac{B-A}{B+A}\mathbf{I}\le E\le\frac{B-A}{B+A}\mathbf{I},$$

sehingga

$$|||E|||\le\frac{B-A}{B+A}=\frac{r}{2+r},$$

dengan $r=\frac{B}{A}-1>0$. Jadi, jika kita menghampiri f dengan $\frac{2}{A+B}\sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle\phi_j$, maka kesalahan maksimumnya adalah $\frac{r}{2+r}\|f\|$.

Untuk memperoleh hampiran yang lebih baik, kita amati lebih lanjut bahwa $F^*F = \frac{A+B}{2}(\mathbf{I}-E)$, sehingga $(F^*F)^{-1}=\frac{2}{A+B}(\mathbf{I}-E)^{-1}$. Karena $|||E|||=\frac{r}{2+r}<1$, maka $\sum_{n=0}^{\infty}E^k$ konvergen dalam norma dan $\sum_{n=0}^{\infty}E^n=(\mathbf{I}-E)^{-1}$. (Di sini $E^0=\mathbf{I}$.) Jadi, untuk setiap $j\in J$, kita mempunyai

$$\tilde{\phi}_j=(F^*F)^{-1}\phi_j=\frac{2}{A+B}\sum_{n=0}^{\infty}E^n\phi_j,$$

dan karena itu

$$f=\frac{2}{A+B}\sum_{j\in J}\langle f,\phi_j\rangle\sum_{n=0}^{\infty}E^n\phi_j.$$

Hampiran yang lebih baik dapat diperoleh melalui

$$f \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \sum_{n=0}^{N} E^n \phi_j,$$

untuk suatu $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ yang cukup besar.

Suatu algoritma rekonstruksi f dapat diperoleh dengan menuliskan

$$f = (F^*F)^{-1}(F^*F)f = \lim_{N \to \infty} f_N$$

dengan

$$\begin{aligned}
f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{N} E^n (F^*F)f \\
&= \frac{2}{A+B}(F^*F)f + \frac{2}{A+B} \sum_{n=1}^{N} E^n (F^*F)f \\
&= \frac{2}{A+B}(F^*F)f + Ef_{N-1} \\
&= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j + f_{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f_{N-1}, \phi_j \rangle \phi_j \\
&= f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \big(\langle f, \phi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \phi_j \rangle \big) \phi_j.
\end{aligned}$$

Jadi, f dapat direkonstruksi secara iteratif, mulai dengan

$$f_0 = \frac{2}{A+B} F^*Ff = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j,$$

$$f_1 = f_0 + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \big(\langle f, \phi_j \rangle - \langle f_0, \phi_j \rangle \big) \phi_j,$$

dan seterusnya, sampai memenuhi ketelitian yang diinginkan. Kesalahan maksimumnya diberikan oleh teorema di bawah ini.

Teorema. Untuk setiap $j \in J$ dan $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tulis $\tilde{\phi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{N} E^n \phi_j$. Maka,

$$\Big\| f - \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j^N \Big\| \le \Big(\frac{r}{2+r} \Big)^{N+1} \|f\|.$$

Bukti. Latihan.

18.4 Soal Latihan

1. Buktikan Teorema pada §18.2.
2. Tunjukkan bahwa frame dual dari $\{\tilde{\phi}_j\}_{j \in J}$ adalah $\{\phi_j\}_{j \in J}$.
3. Buktikan Teorema pada §18.3.