Epilog & Daftar Pustaka

Bila aplikasi deret dan transformasi Fourier telah cukup banyak dibahas, maka berikut ini disajikan ilustrasi bagaimana wavelet Haar digunakan dalam analisis dan pemrosesan signal, khususnya citra digital.

Misalkan kita mempunyai sebuah gambar atau citra (berdimensi dua) yang berukuran 1×1 satuan luas. Secara matematis, gambar ini dapat kita anggap sebagai sebuah fungsi bernilai real yang terdefinisi pada persegi $[0,1] \times [0,1]$, dengan nilai di setiap titik menyatakan intensitas warna gambar di titik tersebut. Dengan perkataan lain, setiap titik dalam gambar tersebut kita kaitkan dengan sebuah bilangan yang mengukur intensitas warna di titik tersebut.

Dalam prakteknya, yang biasanya kita lakukan kemudian adalah diskritisasi. Kita bagi persegi $[0,1] \times [0,1]$ tadi atas sejumlah persegi kecil, yang kita sebut *pixel*, dan setiap pixel kita kaitkan dengan sebuah bilangan, katakanlah $0, 1, \ldots, 255$, yang mewakili warna dominan pada pixel tersebut. Dengan demikian, kita peroleh sebuah matriks, katakanlah berukuran $n \times n$, dengan entri bilangan bulat $0, 1, \ldots, 255$. Matriks ini menyajikan sebuah citra digital, yang merupakan hampiran dari citra aslinya.

Untuk menganalisis dan memroses citra ini dengan menggunakan wavelet Haar, marilah kita tinjau bagaimana kita berhadapan dengan signal atau "citra" digital berdimensi satu. Misalkan kita mempunyai matriks baris berikut

$$M := [4 \quad 8 \quad 3 \quad 1]$$

Matriks ini dapat dinyatakan sebagai deret Haar

$$M = 4[\phi] + 2[\psi] - 2[\psi_{1,0}] + 1[\psi_{1,1}]$$

dengan

$$
\begin{aligned}
[\phi] &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \\
[\psi] &= [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \\
[\psi_{1,0}] &= [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \\
[\psi_{1,1}] &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]
\end{aligned}
$$

Matriks M menyatakan citra dengan resolusi 4, yang tidak lain merupakan sebuah fungsi pada $[0,1]$ yang bernilai 4 pada seperempat selang pertama, 8 pada seperempat selang kedua, 3 pada seperempat selang ketiga, dan 1 pada seperempat selang keempat. Matriks $[\phi]$ tidak lain merupakan fungsi ϕ, demikian pula matriks $[\psi]$, $[\psi_{1,0}]$ dan $[\psi_{1,1}]$ menyatakan fungsi ψ, $\psi_{1,0}$ dan $\psi_{1,1}$.

Koefisien Haar pada uraian deret Haar di atas tentunya dapat dihitung dengan rumus yang kita punyai, namun dengan penyajian dalam bentuk matriks koefisien tersebut tentunya dapat pula diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear yang terkait. Cara lainnya berkaitan dengan konsep analisis multi resolusi, yakni dengan perataan dan pencatatan kesalahannya, sebagai berikut.

Diberikan matriks M dengan resolusi 4 seperti di atas, kita hitung rata-rata setiap dua suku sehingga kita peroleh matriks M_1 dengan resolusi 2 di bawah ini

$$M_1 = [6 \quad 2].$$

Matriks M dapat diperoleh kembali dari M_1 melalui

$$M = [6 \quad 6 \quad 2 \quad 2] + [-2 \quad 2 \quad 1 \quad -1].$$

Matriks pertama di ruas kanan merupakan representasi dari M_1 dengan resolusi 4, sementara matriks kedua menyatakan kesalahan pada proses perataan di atas. Perhatikan bahwa matriks kedua di ruas kanan dapat diuraikan lebih lanjut sebagai

$$-2[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] + 1[0 \quad 0 \quad 1 \quad -1].$$

Proses perataan kita lanjutkan sekali lagi terhadap M_1 sehingga kita peroleh matriks M_2 dengan resolusi 1 berikut

$$M_2 = [4]$$

dan kesalahannya

$$[2 \quad -2].$$

Sebagai matriks dengan resolusi 4, M_2 merepresentasikan

$$[4 \quad 4 \quad 4 \quad 4] = 4[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

sementara kesalahannya

$$[2 \quad 2 \quad -2 \quad -2] = 2[1 \quad 1 \quad -1 \quad -1].$$

Matriks M_1 dapat diperoleh kembali dengan menjumlahkan kedua matriks tersebut, dan M pun dapat diperoleh kembali persis seperti di atas.

Sampai di sini kita telah melihat bagaimana menganalisis suatu signal atau citra digital berdimensi satu dengan menggunakan wavelet Haar. Untuk memroses citra tersebut, misalnya menyimpan citra tersebut (secara digital dalam komputer, misalnya) dan mengambilnya kembali suatu saat serta merekonstruksinya, kita cukup menyimpan koefisien Haar-nya. Tetapi, tunggu dulu, apa untungnya menyimpan koefisien Haar-nya? Bukankah banyaknya data (baca: bilangan) yang disimpan akan sama saja banyaknya dengan banyaknya data semula?

Pada contoh di atas, ya. Namun secara umum bila kita berhadapan dengan sebuah citra dengan resolusi 1024, misalnya, sejumlah koefisien dapat bernilai 0 (ini terjadi misalnya ketika dua bilangan yang berdampingan pada suatu tahap bernilai sama) atau jauh lebih kecil dibandingkan dengan yang lainnya sehingga dapat dianggap 0. Nah, pada saat itulah penghematan tempat penyimpanan (istilah komputer: memori) dapat dilakukan. Bila ini dilakukan, tentunya hasil rekonstruksinya nanti tidak akan sama persis dengan citra semula, tetapi merupakan hampiran.

Citra digital berdimensi dua dapat digarap secara serupa, tentunya dengan menggunakan wavelet berdimensi dua pula, yang pada prinsipnya dapat diperoleh dengan mengambil tensor atau hasilkali wavelet berdimensi satu. Bila wavelet Haar berdimensi dua yang digunakan, proses perataan dan pencatatan kesalahan seperti di atas tetap dapat dilakukan (tentunya sedikit lebih rumit) dalam tahap analisisnya. Proses penyimpanan dan rekonstruksinya dapat dikatakan sama saja.

Berikut adalah citra digital ‘Lena’ beserta hasil rekonstruksinya dengan wavelet Haar, dengan ‘memangkas’ 90% koefisien terkecil. Perhatikan bahwa mata kita hampir tidak dapat membedakan kedua gambar tersebut.

Citra Lena dan rekonstruksinya

Pustaka Utama

I. Daubechies (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF, Philadelphia, Pennsylvania.

R.J. Duffin & Schaeffer (1952), "A class of nonharmonic Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 341-366.

J. Fourier (1807)

D. Gabor (1946), Theory of communication, *J. Inst. Electr. Eng. (London)* **93**, 429-457.

A. Haar (1910), "Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-systeme", *Math. Ann.* **69**, 331-371.

E. Hernandez & G. Weiss (1996), *A First Course on Wavelets*, CRC Press, New York.

E. Hewitt & K. Stromberg (1975), *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlarg, New York.

A.N. Kolmogorov (1926)

W. Rudin (1966), *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

C.E. Shannon (1949), "Communication in the present of noise", *Proc. of the Inst. of Radio Eng.* **37**, 10-21.

Pustaka Pendukung

E. Kreyszig (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons.

Y. Meyer (1992), *Wavelets and Operators*, Cambridge Univ. Press.

Y. Meyer & R. Coifman (1997), *Wavelets: Calderon-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge Univ. Press.

P. Wojtaszczyk (1997), *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge Univ. Press.