2. Deret Fourier

Pada bab ini kita akan membahas deret Fourier dari fungsi periodik. Pendekatan yang dipilih dalam diktat ini sama dengan pendekatan dalam buku “Fourier Analysis and Its Applications” karangan G.B. Folland (Wadsworth 1992).

Untuk kemudahan kita akan lebih banyak bekerja dengan fungsi eksponensial kompleks $e^{i\theta}$ daripada fungsi trigonometri $\cos\theta$ dan $\sin\theta$. Ingat bahwa fungsi-fungsi ini terkait oleh rumus

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{dan} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Kelebihan fungsi cosinus dan sinus adalah bahwa mereka bernilai real dan mempunyai sifat simetri, sementara kelebihan fungsi eksponensial adalah rumus turunan $(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$ dan rumus jumlah $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ yang relatif lebih sederhana.

2.1 Deret Fourier dari fungsi periodik

Misalkan $f(\theta)$ adalah sebuah fungsi bernilai kompleks yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ sedemikian sehingga

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad \forall\,\theta \in \mathbf{R},$$

yakni f *periodik* dengan *periode* 2π. Asumsikan pula bahwa f terintegralkan Riemann pada sebarang interval terbatas (ini dipenuhi bila, misalnya, f terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada sebarang interval terbatas).

Kita ingin mengetahui kapankah f dapat diuraikan sebagai deret

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta).$$

Di sini $\frac{1}{2}a_0$ merupakan koefisien fungsi konstan $1 = \cos 0\theta$, dan faktor $\frac{1}{2}$ sengaja diikutsertakan untuk kemudahan yang akan kita lihat nanti. Tidak ada b_0 karena $\sin 0\theta = 0$.

Menggunakan rumus di atas, persamaan tadi dapat dituliskan sebagai

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

dengan

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ dan } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \in \mathbf{N}$$

atau

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n} \text{ dan } b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kita mencoba terlebih dahulu mencari syarat perlunya. Jika kita mempunyai persamaan di atas, bagaimana koefisien c_n dapat dihitung dalam f? Dengan mengalikan kedua ruas dengan $e^{-ik\theta}$ ($k \in \mathbf{Z}$, kemudian integralkan dari $-\pi$ sampai π, kita peroleh (dengan menganggap bahwa integral deret sama dengan deret integral)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

Tetapi untuk $n \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

sementara untuk $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Jadi satu-satunya suku yang bertahan dalam deret tadi adalah suku ke-k, sehingga kita dapatkan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi c_k.$$

Dengan menamai kembali k sebagai n, kita peroleh rumus untuk koefisien c_n, yakni

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Dari sini kita peroleh

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

dan untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Perhatikan bahwa rumus untuk a_n berlaku pula untuk $n = 0$ karena faktor $\frac{1}{2}$ yang sengaja telah kita ikutsertakan sejak awal.

Definisi. Misalkan f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Bilangan c_n, atau a_n dan b_n, sebagaimana dirumuskan di atas, disebut sebagai koefisien Fourier dari f, sementara deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

disebut sebagai deret Fourier dari f.

Catat bahwa yang telah kita dapatkan saat ini baru syarat perlunya saja, belum syarat cukup. Yakni, jika kita mempunyai sebuah fungsi f yang periodik dengan periode 2π dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$, maka kita dapat menghitung koefisien-koefisien Fourier dan deret Fourier dari fungsi tersebut. Namun pertanyaan apakah f sama dengan deret Fouriernya, atau apakah deret Fourier dari f konvergen (titik demi titik) ke f, sama sekali belum terjawab.

2.2 Contoh dan Ketaksamaan Bessel

Sebelum kita menjawab pertanyaan penting tadi, kita tinjau terlebih dahulu dua buah contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan f periodik dengan periode 2π dan

$$f(\theta) = |\theta|, \quad -\pi \le \theta \le \pi.$$

Maka, dengan mengingat bahwa f merupakan fungsi genap, kita peroleh $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$ dan $b_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Perhatikan bahwa $(-1)^n - 1 = 0$ bila n genap, dan $(-1)^n - 1 = -2$ bila n ganjil. Dengan demikian deret Fourier dari f adalah

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2}\cos n\theta.$$

Contoh 2. Misalkan g periodik dengan periode 2π dan

$$g(\theta) = \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Maka $c_0 = 0$ dan $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$ untuk setiap $n \neq 0$. Jadi deret Fourier dari g adalah

$$\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}$$

atau, mengingat $(-1)^n = (-1)^{-n}$ dan $\frac{e^{in\theta}}{in} + \frac{e^{-in\theta}}{-in} = \frac{2}{n}\sin n\theta$,

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta.$$

Mari kita lihat apakah deret Fourier dari masing-masing fungsi tersebut konvergen titik demi titik ke fungsi semula, dengan mengamati kecenderungan beberapa jumlah parsial pertamanya.

[Gambar 2.2a: Fungsi f dan deret Fouriernya]

[Gambar 2.2b: Fungsi g dan deret Fouriernya]

Ketaksamaan berikut memberikan suatu hampiran untuk koefisien Fourier, yang kelak diperlukan dalam pembahasan kekonvergenan deret Fourier.

Ketaksamaan Bessel. Jika f periodik dengan periode 2π dan terintegralkan Riemann pada $[-\pi, \pi]$, maka koefisien Fourier c_n yang ditentukan oleh rumus di atas memenuhi ketaksamaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

`Catatan.` Mengingat $|a_0|^2 = 4|c_0|^2$ dan $|a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ untuk $n \geq 1$, kita peroleh

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Bukti. Karena $|z|^2 = z\bar{z}$, maka untuk setiap $\theta \in [-\pi, \pi]$ dan $N \in \mathbf{N}$ berlaku

$$|f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 = |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} [c_n \bar{f}(\theta) e^{in\theta} - \bar{c}_n f(\theta) e^{-in\theta}] + \sum_{m,n=-N}^{N} c_m \bar{c}_n e^{i(m-n)\theta}.$$

Bagi kedua ruas dengan 2π dan integralkan pada $[-\pi, \pi]$, dengan mengingat rumus koefisien c_n pada §2.1:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Karena integral di ruas kiri tak mungkin negatif, maka

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,$$

dan ini berlaku untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. [QED]

Akibat (Lemma Riemann-Lebesgue). Koefisien Fourier c_n menuju 0 bila $|n| \to \infty$. Koefisien Fourier a_n dan b_n menuju 0 bila $n \to \infty$.

Bukti. $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, dan $|c_n|^2$ merupakan suku ke-n deret yang konvergen, dan karenanya mereka menuju 0 dan demikian pula halnya dengan a_n, b_n, dan c_n. [QED]

2.3 Soal Latihan

1. Verifikasi hubungan antara a_n, b_n, dan c_n yang dibahas pada 2.1.
2. (a) Verifikasi perhitungan koefisien a_n dan b_n pada Contoh 1.

   (b) Verifikasi perhitungan koefisien c_n pada Contoh 2.
3. Verifikasi hubungan antara $|a_n|$, $|b_n|$, dan $|c_n|$ yang dinyatakan sebagai Catatan pada 2.2.