3. Kekonvergenan Deret Fourier

Sekarang kita akan membahas kekonvergenan deret Fourier, khususnya *kekonvergenan titik demi titik*. Melalui Contoh 2 yang dibahas pada bab sebelumnya kita mengetahui bahwa secara umum deret Fourier dari suatu fungsi tidak selalu konvergen titik demi titik ke fungsi semula, khususnya di titik di mana fungsi tersebut diskontinu. Namun, kita akan melihat bila fungsi tersebut memenuhi sejumlah hipotesis tertentu, maka deret Fouriernya akan konvergen titik demi titik.

3.1 Jumlah parsial dan intuisi melalui kernel Dirichlet

Untuk menjawab pertanyaan apakah deret

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

atau deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

dengan a_n, b_n, dan c_n sebagaimana diberikan sebelumnya, konvergen ke $f(\theta)$, kita tinjau jumlah parsialnya, yakni

$$S_N^f(\theta) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

(Ketika kita bekerja dengan bentuk eksponensial, kita sepakat bahwa kita senantiasa menyatukan suku $e^{in\theta}$ dan $e^{-in\theta}$. Itu sebabnya kita harus menyelidiki jumlah parsial simetris di atas.)

Jika kita substitusikan rumus untuk c_n ke dalam jumlah parsial tadi, maka kita akan mendapatkan

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\theta-\psi)}d\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\psi-\theta)}d\psi.$$

Selanjutnya, dengan substitusi peubah $\phi = \psi - \theta$ dan mengingat bahwa f periodik dengan periode 2π, kita peroleh

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(\theta+\phi)e^{in\phi}d\phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)e^{in\phi}d\phi.$$

Karena $\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}\ldots$, kita dapat menuliskan

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)D_N(\phi)d\phi,$$

dengan $D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$.

Fungsi $D_N(\phi)$ dikenal sebagai *kernel Dirichlet*. Dengan mengenalinya sebagai deret geometri, dengan suku pertama $e^{-iN\phi}$ dan rasio $e^{i\phi}$, kita dapat menyederhanakannya sebagai

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $e^{-i\phi/2}$, kita peroleh

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1/2)\phi} - e^{-i(N+1/2)\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+1/2)\phi}{\sin\phi/2}.$$

Grafik $D_N(\phi)$ untuk $N = 25$ kurang lebih berbentuk seperti di bawah ini.

[Gambar 3.1: Grafik $D_25(\phi)$]

Intuisi yang mendorong kita untuk menyimpulkan bahwa $S_N^f(\theta) \to f(\theta)$ adalah sebagai berikut: titik puncak $D_N(\phi)$ yang terjadi di $\phi = 0$ 'memetik' nilai $f(\theta)$ pada $S_N^f(\theta)$; sementara osilasi cepat yang terjadi pada $D_N(\phi)$ untuk ϕ jauh dari 0 'membunuh' bagian lainnya karena adanya pencoretan antara nilai positif dan negatif.

3.2 Kekonvergenan titik demi titik

Untuk membuktikan kekonvergenan titik demi titik deret Fourier, kita memerlukan lemma berikut mengenai kernel Dirichet dan sejumlah peristilahan.

Lemma Kernel Dirichlet. Untuk setiap $N \in \mathbf{N}$ berlaku

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} D_N(\theta)d\theta = \frac{1}{2}.$$

Bukti. Dari rumus untuk D_N, kita mempunyai

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta,$$

sehingga

$$\int_{0}^{\pi} D_N(\theta)d\theta = \Big[\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\theta}{n}\Big]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$

Serupa dengan itu,

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)d\theta = \frac{1}{2}.$$

[QED]

Misalkan $-\infty < a < b < \infty$. Kita katakan bahwa f *kontinu bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila ... [lihat buku].

Lalu, kita katakan bahwa f *mulus bagian demi bagian pada* $[a, b]$ apabila ... [lihat buku].

Sebagai ilustrasi, fungsi yang kontinu bagian demi bagian dapat berbentuk seperti ...

[Gambar 3.2a: Fungsi kontinu bagian demi bagian]

Sementara itu fungsi yang mulus bagian demi bagian berbentuk seperti ...

[Gambar 3.2b: Fungsi mulus bagian demi bagian]

Selanjutnya, f dikatakan *kontinu (mulus) bagian demi bagian pada* $\mathbf{R}$ apabila ia kontinu (mulus) bagian demi bagian pada sebarang selang terbatas $[a, b]$.

Teorema Kekonvergenan Deret Fourier. Jika f periodik dengan periode 2π dan mulus bagian demi bagian, maka

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)],$$

dengan $f(\theta-) := \lim_{h\to 0^-} f(\theta+h)$ dan $f(\theta+) := \lim_{h\to 0^+} f(\theta+h)$.

Bukti. Menurut Lemma Kernel Dirichlet, kita mempunyai

$$\frac{1}{2}f(\theta-) = f(\theta-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)d\phi, \quad \frac{1}{2}f(\theta+) = f(\theta+)\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)d\phi,$$

sehingga

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)[e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}]d\phi,$$

dengan

$$g(\phi) = \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta-)}{e^{i\phi}-1},\ -\pi < \phi < 0, \quad g(\phi) = \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta+)}{e^{i\phi}-1},\ 0 < \phi < \pi.$$

Di sini g terdefinisi dengan baik pada $[-\pi,\pi]$ dan sama mulusnya dengan f, kecuali di dekat $\phi = 0$. Namun, berdasarkan Aturan L'Hopital, g mempunyai limit kanan dan limit kiri di 0, sehingga g kontinu bagian demi bagian pada $[-\pi,\pi]$. Akibatnya, menurut Ketaksamaan Bessel, koefisien Fourier dari g, sebutlah C_n, akan menuju 0 bila $n\to\infty$. Sebagai selisih dua koefisien Fourier dari g, ekspresi di atas akan menuju 0 bila $N\to\infty$. [QED]

Teorema di atas memberitahu kita bahwa deret Fourier dari f konvergen titik demi titik ke f, kecuali mungkin di titik-titik diskontinuitas f. Bila kita definisikan ulang nilai f di titik-titik diskontinuitasnya sebagai nilai rata-rata limit kiri dan limit kanannya, maka deret Fourier dari f yang mulus bagian demi bagian pada $[-\pi,\pi]$ akan konvergen titik demi titik pada $[-\pi,\pi]$. Lebih jauh, jika f juga kontinu pada $[-\pi,\pi]$, maka kita mempunyai teorema berikut.

Teorema Kekonvergenan Seragam Deret Fourier. Jika f periodik dengan periode 2π, kontinu dan mulus bagian demi bagian, maka deret Fourier f konvergen mutlak dan secara seragam pada $\mathbf{R}$.

3.3 Soal Latihan

1. Misalkan f dan g periodik dengan periode 2π dan mulus bagian demi bagian. Buktikan jika f dan g mempunyai koefisien Fourier yang sama, maka mestilah $f = g$.
2. Gunakan deret Fourier pada Contoh 2 yang dibahas pada Bab 2 dan teorema kekonvergenan titik demi titik di atas untuk membuktikan kesamaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

   dengan meninjau nilai deret Fourier dan fungsi di $\theta = 0$.
3. Buktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

   dengan menggunakan deret Fourier dari fungsi tertentu.