# 4. Deret Fourier pada Interval Sebarang dan Aplikasi

Kita telah mempelajari bagaimana menguraikan fungsi periodik dengan periode $2\pi$ yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ sebagai deret Fourier. Deret trigonometri tersebut sebetulnya dapat pula dipakai sebagai representasi fungsi yang terdefinisi pada interval sebarang yang panjangnya $2\pi$. Pada bab ini kita akan membahas deret Fourier dari suatu fungsi yang didefinisikan pada interval sebarang dan aplikasinya.

## 4.1 Deret Fourier pada interval sebarang

Misalkan kita mempunyai sebuah fungsi $f$ yang terdefinisi pada $[-\pi, \pi]$, dengan asumsi $f(-\pi) = f(\pi)$. (Asumsi ini dapat dipenuhi dengan cara mendefinisikan ulang, bila perlu, nilai $f$ di salah satu titik ujungnya. Asumsi ini dapat pula dihapuskan dengan menganggap $f$ terdefinisi hanya pada $(-\pi, \pi]$.) Selanjutnya misalkan $f$ terbatas dan terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Kita perluas $f$ pada $\mathbf{R}$ sedemikian sehingga $f$ periodik dengan periode $2\pi$, melalui

$$f(\theta + 2n\pi) = f(\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi],\ n \in \mathbf{Z}.$$

Sebagai contoh, fungsi periodik $f$ yang dibahas pada Contoh 1 pada Bab 2 dapat dipandang sebagai perluasan periodik fungsi $f(\theta) = |\theta|$ dari interval $(-\pi, \pi]$ ke seluruh $\mathbf{R}$.

Jika $f$ mulus bagian demi bagian pada $(-\pi, \pi]$, maka kita dapat menguraikannya sebagai deret Fourier. Dengan membatasi kembali peubah $\theta$ pada $[-\pi, \pi]$, kita peroleh deret Fourier dari fungsi semula.

Sekarang misalkan $f$ terdefinisi hanya pada $[0, \pi]$. Kita dapat memperluas $f$ pada $\mathbf{R}$ sedemikian sehingga ia merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi$, dan kemudian kita peroleh deret Fouriernya. Untuk memperluas $f$ pada $\mathbf{R}$, pertama kita perluas $f$ pada $[-\pi, \pi]$. Ada dua cara yang baku untuk hal ini, yakni dengan membuatnya menjadi fungsi genap atau ganjil. Perluasan genap $f_{\text{genap}}$ pada $[-\pi, \pi]$ dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{genap}}(-\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi];$$

sementara perluasan ganjil $f_{\text{ganjil}}$ dapat diperoleh melalui

$$f_{\text{ganjil}}(-\theta) = -f(\theta), \quad \theta \in (0, \pi], \quad f_{\text{ganjil}}(0) = 0;$$

Untuk ilustrasi, lihat gambar berikut.

[Gambar 4.1: Perluasan genap dan perluasan ganjil]

Keuntungan menggunakan $f_{\text{genap}}$ dan $f_{\text{ganjil}}$ adalah bahwa koefisien Fouriernya kelak lebih sederhana. Untuk $f_{\text{genap}}$, koefisien sinusnya akan sama dengan nol (karena $\sin n\theta$ merupakan fungsi ganjil). Untuk $f_{\text{ganjil}}$, koefisien cosinusnya akan sama dengan nol (karena $\cos n\theta$ merupakan fungsi genap). Jadi, deret Fourier dari $f_{\text{genap}}$ hanya melibatkan fungsi cosinus, sementara deret Fourier dari $f_{\text{ganjil}}$ hanya melibatkan fungsi sinus. Dengan simetri, perhitungan koefisien lainnya juga menjadi lebih mudah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{genap}}(\theta) \cos n\theta \, d\theta = 2 \int_{0}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ganjil}}(\theta) \sin n\theta \, d\theta = 2 \int_{0}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Perhatikan bahwa pada akhirnya fungsi $f$ yang semula terdefinisi pada $[0, \pi]$ muncul kembali dalam perhitungan koefisien Fourier di atas.

**Definisi.** Misalkan $f$ terintegralkan pada $[0, \pi]$. Deret

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \cos n\theta, \quad \text{dengan } a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

disebut *deret Fourier cosinus* dari $f$. Deret

$$\sum_{n=1}^{n} b_n \sin n\theta, \quad \text{dengan } b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta,$$

disebut *deret Fourier sinus* dari $f$.

**Teorema.** Misalkan $f$ mulus bagian demi bagian pada $[0, \pi]$. Maka, deret Fourier cosinus dan deret Fourier sinus dari $f$ konvergen ke $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$ di setiap $\theta \in (0, \pi)$. Khususnya, mereka konvergen ke $f(\theta)$ jika $f$ kontinu di $\theta \in (0, \pi)$. Deret Fourier cosinus dari $f$

konvergen ke $f(0+)$ di $\theta = 0$ dan ke $f(\pi-)$ di $\theta = \pi$; deret Fourier sinus dari $f$ konvergen ke 0 di kedua titik tersebut.

Sekarang misalkan $f(x)$ adalah fungsi periodik dengan periode $2L$. Dengan substitusi peubah $x = \frac{L\theta}{\pi}$, kita peroleh fungsi baru

$$g(\theta) := f\Big(\frac{L\theta}{\pi}\Big) = f(x).$$

Perhatikan bahwa $g$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi$, dan karenanya dapat diuraikan sebagai deret Fourier

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

asalkan $g$ mulus bagian demi bagian. Jika kita subtitusikan kembali $\theta = \frac{\pi x}{L}$ ke dalam rumus di atas, maka kita dapatkan deret Fourier periodik dengan periode $2L$ dari fungsi $f$ semula:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx.$$

Dinyatakan dalam cosinus dan sinus, deret ini menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}],$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Dengan cara yang serupa seperti sebelumnya kita dapat memperoleh deret Fourier cosinus dan deret Fourier sinus dari fungsi $f$ yang mulus bagian demi bagian pada $[0, L]$, yakni

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

dan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

**Contoh.** Deret Fourier cosinus dari fungsi $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$, adalah

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x;$$

sementara deret Fourier sinusnya adalah

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x.$$

## 4.2 Contoh aplikasi

Pada Bab 1 kita telah membahas persamaan panas untuk sepotong kawat lurus yang panjangnya $L$, yakni

$$u_u = ku_{xx}$$

dengan syarat batas

$$u(0, t = u(L, t) = 0$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x).$$

Kandidat solusi masalah ini adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dengan koefisien $b_n$ memenuhi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Sekarang kita telah mengetahui bahwa persamaan terakhir di atas dapat dipenuhi apabila $f$ mulus bagian demi bagian pada $[0, L]$ dan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Pertanyaannya kemudian adalah: apakah $u(x, t)$ yang diberikan sebagai deret oleh rumus di atas, dengan koefisien $b_n$ ini, sungguh merupakan solusi masalah tadi? Jawabannya *ya*. Penjelasannya adalah sebagai berikut: Masing-masing suku deret merupakan solusi persamaan panas. Pada daerah $0 \le x \le L$, $t \ge \epsilon > 0$, deret konvergen mutlak dan seragam. Karena itu, penurunan suku demi suku dapat dilakukan untuk menunjukkan bahwa $u(x,t)$ merupakan solusi persamaan panas. Syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(x,0) = f(x)$ mudah diperiksa. Lebih jauh, dengan uji $M$-Weierstrass, dapat ditunjukkan bahwa deret konvergen seragam pada daerah $0 \leq x \leq L,\ t \geq 0$, dan karenanya $u$ kontinu pada daerah ini, sehingga $u(x,t) \to u(x,0) = f(x)$ bila $t \to 0$.

Pertanyaan berikutnya adalah: apakah solusi masalah tersebut tunggal? Jawabannya juga *ya*. Setiap solusi $u(x,t)$ untuk masalah tersebut mestilah dapat diuraikan sebagai deret Fourier dalam $x$ untuk setiap $t$. Substitusikan deret ini ke dalam persamaan dan gunakan syarat awal, kita akan sampai pada kesimpulan bahwa koefisien deret ini mestilah sama dengan koefisien Fourier yang kita peroleh sebelumnya.

## 4.3 Soal Latihan

1. Bagaimana anda dapat memperoleh deret Fourier dari sebuah fungsi yang terdefinisi pada sebarang interval $[a,b]$? Jelaskan secara detil.
2. Verifikasi ketunggalan solusi persamaan panas dengan syarat batas dan syarat awal yang dibahas pada Pasal 4.2.