5. Beberapa Catatan Mengenai Deret Fourier

5.1 Turunan dan Integral dari Deret Fourier

Teorema Turunan. Misalkan f periodik dengan periode 2π, kontinu, dan mulus bagian demi bagian. Misalkan a_n, b_n, dan c_n adalah koefisien Fourier dari f (real dan kompleks). Misalkan a_n', b_n', dan c_n' menyatakan koefisien Fourier dari f'. Maka, untuk setiap n, berlaku

$$a_n' = nb_n, \; b_n' = -na_n, \text{ dan } c_n' = inc_n.$$

Teorema Integral. Misalkan f periodik dengan periode 2π, dan a_n, b_n, dan c_n adalah koefisien Fourier dari f. Misalkan $F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)d\phi$, anti-turunan dari f. Jika $c_0 (= \frac{1}{2}a_0) = 0$, maka untuk setiap θ berlaku

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta \Big),$$

dengan suku konstanta C_0 sama dengan nilai rata-rata F pada $[-\pi, \pi]$, yakni

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) d\theta.$$

Teorema Kekonvergenan Mutlak dan Seragam. Jika f periodik dengan periode 2π, kontinu, dan mulus bagian demi bagian, maka deret Fourier dari f konvergen secara mutlak dan seragam pada $\mathbf{R}$.

5.2 Deret Fourier sebagai Transformasi

Diberikan sebuah fungsi periodik f dengan periode 2π, koefisien Fourier c_n dari f dapat dipandang sebagai suatu pemetaan

$$n \mapsto c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \widehat{f}(n),$$

yang terdefinisi pada $\mathbf{Z}$. Transformasi $f \mapsto \widehat{f}$ memetakan fungsi periodik f yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ ke barisan $\widehat{f}$ yang terdefinisi pada $\mathbf{Z}$. Invers dari transformasi ini memetakan barisan $\phi(n)$ yang terdefinisi pada $\mathbf{Z}$ ke fungsi periodik $g(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n)e^{in\theta}$ yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$.

Pada prinsipnya, informasi tentang f tersimpan dalam $\widehat{f}$, dan sebaliknya. Namun, Teorema Turunan, misalnya, menunjukkan bahwa transformasi di atas mengubah proses penurunan menjadi suatu operasi yang sederhana: $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.

5.3 Perbandingan dengan Deret Taylor

Kita masih ingat bagaimana menguraikan sebuah fungsi f sebagai deret Taylor di sekitar suatu titik x_0 dalam daerah definisinya:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r,$$

asalkan f dapat diturunkan tak hingga kali di x_0, dan suku sisa Taylor-nya menuju 0 pada interval tersebut. Kecepatan kekonvergan deret Taylor di x bergantung pada seberapa jauh x dari x_0. Secara umum, jumlah parsial dari deret Taylor dapat memberikan hampiran yang sangat baik di dekat x_0 tetapi tidak untuk x yang jauh dari x_0.

Berbeda dengan deret Taylor, deret Fourier untuk fungsi f yang periodik dengan periode $2L$ tidak mengharuskan f mempunyai turunan tiap orde. Bila f cukup mulus pada $[-L, L]$, jumlah parsial dari deret Fourier akan konvergen ke f cukup cepat dan secara seragam, serta memberikan hampiran yang baik pada $[-L, L]$.

Jadi, bila deret Taylor terkait erat dengan perilaku lokal fungsi, maka deret Fourier terkait erat dengan perilaku global fungsi.

5.4 Fenomena Gibbs

Misalkan f adalah sebuah fungsi periodik. Jika f mempunyai diskontinuitas di x_0, maka deret Fourier dari f tidak mungkin konvergen ke f secara seragam pada interval yang mengandung x_0 (karena limit seragam dari barisan fungsi kontinu haruslah kontinu). Untuk fungsi f yang mulus bagian demi bagian, deret Fourier dari f mengalami suatu fenomena yang dikenal sebagai fenomena Gibbs, khususnya di titik-titik diskontinuitas fungsi f. Jumlah parsialnya dalam hal ini akan "overshoot" dan "undershoot" f di dekat titik diskontinuitasnya.

Sebagai ilustrasi, tinjau $f(\theta) = \pi - \theta,$ untuk $0 < \theta < 2\pi,$ $f(\theta + 2n\pi) = f(\theta)$ untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$. Maka, deret Fourier dari f akan tampak seperti pada gambar di bawah ini.

[Gambar 5.1: Fenomena Gibbs]

Perhatikan bahwa ada semacam "spike" di dekat titik-titik diskontinuitas f.

Untuk mengetahui berapa besar "overshoot" dan "undershoot" tersebut, lihat soal pada halaman 61 di buku G.B. Folland "Fourier Analysis and Its Applications."

5.5. Soal Latihan

1. Diketahui $f(\theta) = \pi - \theta,$ untuk $0 < \theta < 2\pi,$ $f(\theta + 2n\pi) = f(\theta)$ untuk setiap $n \in \mathbf{Z}$.

(a) Tunjukkan bahwa $f(\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ untuk $0 < \theta < 2\pi$.

(b) Misalkan $g_N(\theta) := 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\theta}{n} - (\pi - \theta)$. Tunjukkan bahwa $g_N'(\theta) = 2\pi D_N(\theta)$, dengan D_N adalah kernel Dirichlet pada §3.

(c) Tunjukkan bahwa titik stasioner pertama di sebelah kanan 0 dari $g_N(\theta)$ tercapai di $\theta_N = \frac{\pi}{N+1/2}$, dan

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}} d\theta - \pi.$$

(d) Tunjukkan bahwa $\lim_{N\to\infty} g_N(\theta_N) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{\phi} d\phi - \pi$.