6. Himpunan Fungsi Ortogonal

Misalkan f periodik dengan periode 2π, dan mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$. Jika $S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, adalah jumlah parsial dari deret Fourier f, maka kita telah menunjukkan bahwa (S_N^f) konvergen ke f, yakni

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = f(\theta)$$

hampir di mana-mana. Dalam hal ini kita dapat merekonstruksi f dari koefisien-koefisien Fourier-nya melalui

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Namun, secara umum, deret Fourier f tidak selalu sama persis dengan fungsi f semula. Bahkan, dalam kasus ekstrim, deret Fourier f dapat divergen di mana-mana, sebagaimana ditunjukkan oleh Kolmogorov (1926). Fungsi yang mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$ tentunya terintegralkan pada $[-\pi, \pi]$. Keterintegralan f pada $[-\pi, \pi]$ merupakan premis yang diasumsikan pada awal pembahasan deret Fourier. Tetapi, fakta di atas mengindikasikan bahwa mestinya ada hal lain selain keterintegralan f pada $[-\pi, \pi]$ yang menjamin deret Fourier f konvergen ke f.

6.1 Himpunan Fungsi Ortogonal

Deret Fourier dibentuk dari suatu keluarga fungsi ortogonal di suatu ruang fungsi yang dilengkapi dengan hasilkali dalam tertentu.

Di ruang vektor X yang dilengkapi dengan hasilkali $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dan norm $\|\cdot\|$, vektor $u \in X$ disebut *vektor normal* jika $\|u\| = 1$. Vektor $v \neq 0$ dapat dinormalkan dengan membaginya dengan $\|v\|$: jika $u := \frac{v}{\|v\|}$, maka $\|u\| = 1$. Himpunan vektor $\{u_1, \ldots, u_n\}$ disebut *himpunan ortonormal* jika $\|u_i\| = 1$ untuk tiap $i = 1, \ldots, n$ dan $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ untuk $i \neq j$; yakni jika

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

[Jika $v_i \neq 0$ untuk tiap $i = 1, \ldots, n$ dan $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$, maka $\{v_1, \ldots, v_j\}$ disebut *himpunan ortogonal*.]

Jika $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ortonormal di $\mathbf{C}^k$ dan $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, maka $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle$ untuk tiap $i = 1, \ldots, k$. Sebaliknya, misalkan $v \in \mathbf{C}^k$. Jika kita definisikan $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle$ untuk $i = 1, \ldots, n$ dan tulis $\overline{v} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, maka $w = v - \overline{v} \perp u_i$, karena

$$\langle w, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle \overline{v}, u_i \rangle = 0,$$

untuk tiap $i = 1, \ldots, n$. Akibatnya $w = 0$, karena bila tidak, maka $\{u_1, \ldots, u_k, w\}$ merupakan himpunan ortogonal dengan $k + 1$ anggota di $\mathbf{C}^k$.

Teorema. Misalkan $\{u_1, \ldots, u_k\}$ himpunan ortonormal k vektor di $\mathbf{C}^k$. Maka, untuk setiap $v \in \mathbf{C}^k$, berlaku

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k \rangle u_k.$$

Lebih jauh,

$$\|v\|^2 = |\langle v, u_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, u_k \rangle|^2.$$

6.2 Ruang $PC(a, b)$ sebagai Ruang Hasilkali Dalam

Mari kita tinjau ruang $PC(a, b)$, yaitu ruang fungsi kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$. Ingat bahwa f dikatakan kontinu bagian demi bagian pada $[a, b]$ apabila f kontinu pada $[a, b]$ kecuali di sejumlah terhingga titik $x_1, \ldots, x_k$, dan di titik-titik tersebut limit kiri dan limit kanan f ada. Fungsi f di $PC(a, b)$ tidak hanya terintegralkan tetapi juga kuadratnya terintegralkan, yakni $|f|^2$ terintegralkan, pada (a, b). Pada $PC(a, b)$ kita dapat mendefinisikan hasilkali dalam

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

dan norm

$$\|f\| := \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan segitiga, dan Teorema Pythagoras berlaku di $PC(a, b)$ dengan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan $\| \cdot \|$ di atas.

Teorema Pythagoras. Jika $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortogonal, maka $\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2$.

Diberikan suatu himpunan ortonormal $\{\phi_n\}$ di $PC(a,b)$ dan $f \in PC(a,b)$ sembarang, kita ingin tahu apakah $f = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$. Mengingat bahwa $PC(a,b)$ berdimensi tak terhingga, pertanyaan ini tidak dapat segera kita jawab. Jika $\{\phi_n\}$ terhingga, jelas hal tersebut tidak mungkin terjadi. Jika $\{\phi_n\}$ tak terhingga, apakah cukup banyak untuk merentang $PC(a,b)$?

Sebelum menjawab pertanyaan ini secara rinci, mari kita tinjau keluarga fungsi

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

di ruang $PC(-\pi, \pi)$. Perhatikan bahwa

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx = \delta_{mn}.$$

Jadi $\{\phi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ merupakan himpunan ortonormal.

Selanjutnya, koefisien Fourier c_n dari $f \in PC(-\pi, \pi)$ diberikan oleh rumus

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \phi_n \rangle, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Jadi,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \phi_n \rangle \right] \left[\sqrt{2\pi} \phi_n(x) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Jadi deret Fourier f merupakan uraian terhadap himpunan ortonormal $\{\phi_n\}$.

Demikian pula kita dapat memeriksa bahwa keluarga fungsi $\{\psi_n\}_0^{\infty}$ dengan

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

merupakan keluarga fungsi ortonormal di $PC(0, \pi)$. Selanjutnya, koefisien cosinus Fourier a_n dari $f \in PC(0, \pi)$ yang diberikan oleh rumus

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_0 \rangle, & \text{untuk } n = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \langle f, \psi_n \rangle, & \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

memenuhi

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x).$$

Hal serupa terjadi untuk deret sinus Fourier dan deret Fourier lengkap (versi real).

Kita sudah tahu bahwa deret Fourier ini konvergen ke f hampir di mana-mana apabila f mulus bagian demi bagian pada $[-\pi, \pi]$. Pertanyaannya adalah: bagaimana bila $f \in PC(-\pi, \pi)$?

6.3 Kekonvergenan di Ruang $PC(a, b)$

Barisan fungsi $\{f_n\}$ di $PC(a, b)$ dikatakan *konvergen dalam norm* ke $f \in PC(a, b)$ apabila $\|f_n - f\| \to 0$ untuk $n \to \infty$, yakni jika

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0, \quad \text{untuk } n \to \infty.$$

Perlu dicatat bahwa kekonvergenan dalam norm tidak menjamin kekonvergan titik demi titik. Sebagai contoh, ambil

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Di sini $\|f_n\|^2 = \frac{1}{n} \to 0$ bila $n \to \infty$. Jadi $\{f_n\}$ konvergen ke $f \equiv 0$ dalam norm. Tetapi $f_n(0) = 1$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, sehingga $\{f_n\}$ tidak konvergen ke 0 titik demi titik.

Sebaliknya, misalkan

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & \text{jika } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Maka, $g_n \to 0$ titik demi titik, tetapi

$$\|g_n\|^2 = \int_0^1 |g_n(x)|^2 = \int_0^{1/n} n^2 dx = n \not\to 0$$

bila $n \to \infty$.

Teorema. Jika $f_n \to f$ secara seragam pada $[a, b]$, maka $f_n \to f$ dalam norm.

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, kita pilih $n_0 \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $n \ge n_0$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}$. Akibatnya,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \le \epsilon^2.$$

Ini menunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen ke f dalam norm. [QED]

Di satu sisi, dengan adanya hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan norm $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$, ruang $PC(a, b)$ sekarang lebih terstruktur (secara geometri). Di sisi lain, ruang ini menjadi 'tidak lengkap', yakni: terdapat barisan Cauchy $\{f_n\}$ di $PC(a, b)$ yang tidak konvergen ke suatu fungsi $f \in PC(a, b)$. Sebagai contoh, tinjau $PC(0, 1)$ dan ambil barisan $\{f_n\}$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } x > \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \leq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Jika $m > n$, maka

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } \frac{1}{m} < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya} \end{cases},$$

sehingga

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-1}{2}}\, dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \to 0,$$

bila $m, n \to \infty$. Jadi $\{f_n\}$ merupakan barisan Cauchy; tetapi limitnya (baik titik demi titik maupun dalam norm) adalah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & \text{jika } x > 0, \\ 0, & \text{jika } x = 0, \end{cases}$$

yang bukan anggota $PC(0, 1)$ karena $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.

Lalu apa yang harus dilakukan? Sebagaimana lazimnya, yang harus dilakukan adalah 'melengkapi' ruang $PC(a, b)$, dengan menambahkan limit-limit dari semua barisan Cauchy pada $PC(a, b)$. Hasilnya adalah ruang $L^2(a, b)$ yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

6.4 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa keluarga fungsi $\{\phi_n\}_1^\infty$ dengan $\phi_n(x) := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin nx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ merupakan himpunan ortonormal di $PC(0, \pi)$, dan koefisien sinus Fourier

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \langle f, \phi_n \rangle,$$

memenuhi

$$\sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$