7. Ruang $L^2(a,b)$

Ruang $L^2(a,b)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan pada $[a,b]$, yakni

$$L^2(a,b) := \{f \, : \, \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty\}.$$

Ruang ini mencakup fungsi-fungsi f yang tak terbatas pada $[a,b]$ tetapi $|f|^2$ terintegralkan, termasuk dalam pengertian integral tak wajar ala Riemann.

7.2 Topologi di $L^2(a,b)$

Di ruang $L^2(a,b)$, hasilkali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang didefinisikan sebagai

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

terdefinisi dengan baik, mengingat

$$|f(x)\overline{g(x)}| \le \frac{1}{2}\big(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\big).$$

Seperti halnya di $PC(a,b)$, norm $\| \cdot \|$ pada $L^2(a,b)$ yang didefinisikan sebagai

$$\|f\| := \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

mempunyai sedikit masalah, yaitu $\|f\| = 0$ tidak mengakibatkan $f = 0$ tetapi $f = 0$ hampir di mana-mana. Untuk mengatasi masalah ini, dua fungsi di $L^2(a,b)$ dianggap sama bila mereka bernilai sama hampir di mana-mana. Dengan kata lain, anggota $L^2(a,b)$ sekarang adalah kelas-kelas ekuivalen fungsi. Namun, dalam prakteknya, kita sering mengaburkan kelas ekuivalen dan fungsi yang mewakili kelas ekuivalen tersebut.

Teorema berikut tidak akan dibuktikan, tapi akan menjadi rujukan kita ke depan.

Teorema. (a) $L^2(a,b)$ lengkap terhadap kekonvergenan dalam norm.

(b) Untuk setiap $f \in L^2(a,b)$ terdapat barisan fungsi kontinu pada $[a,b]$, sebutlah $\{f_n\}$, sedemikian sehingga $f_n \to f$ dalam norm.

`Catatan`. Bagian (b) menyatakan bahwa himpunan fungsi kontinu pada $[a,b]$ 'padat' di $L^2(a,b)$. Sesungguhnya, ruang $L^2(a,b)$ dapat dipandang sebagai 'lengkapan' dari ruang fungsi $C(a,b)$ yang beranggotakan semua fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$. Terhadap norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, ruang fungsi $C(a,b)$ tidak lengkap. Bila kita tambahkan semua limitnya, maka kita peroleh ruang $L^2(a,b)$. Lebih jauh, setiap fungsi $f \in L^2(a,b)$ dapat dihampiri oleh fungsi f_n yang merupakan pembatasan pada $[a,b]$ dari fungsi f_n^* yang terdefinisi pada $\mathbf{R}$ dan mempunyai turunan setiap orde di setiap titik. Fungsi f_n* bisa merupakan fungsi periodik dengan periode $b-a$ ataupun mempunyai tumpuan kompak.

Berikut adalah bukti Bagian (a) saja. [Bukti bagian (b) di luar jangkauan, jadi tidak diberikan di sini.]

Bukti. (a) Misalkan (f_n) barisan Cauchy di $L^2(a,b)$, yakni $\|f_m - f_n\| \to 0,\ m,n \to \infty$. Pilih subbarisan indeks (n_k) sedemikian sehingga

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \le (b-a)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Maka, menurut Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita mempunyai

$$\int_0^1 |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|\, dx \le \|1\| \cdot \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

untuk setiap $k \in \mathbf{N}$. Dengan demikian,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|\, dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Menurut Lemma Fatou (lihat misalnya H.L. Royden, "Real Analysis"), $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$, dan karenanya juga $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$, konvergen hampir untuk setiap titik $x \in [0,1]$. Akibatnya,

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x))$$

konvergen ke suatu fungsi $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$ hampir untuk setiap titik $x \in [a,b]$. Jadi, (f_n) mempunyai subbarisan yang konvergen.

Selanjutnya akan kita tunjukkan bahwa fungsi f di atas merupakan anggota $L^2(a,b)$ dan bahwa $\|f_n - f\| \to 0,\ n \to \infty$. Ambil $\epsilon > 0$ sebarang. Maka, kita dapat memilih k dan l cukup besar sedemikian sehingga $\int_0^1 (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 dx < \epsilon$. Dengan mengambil $l \to \infty$, kita peroleh

$$\int_0^1 (f_{n_k}(x) - f(x))^2 dx \leq \epsilon.$$

Jadi mestilah $f \in L^2(a,b)$ dan $(f_{n_k}) \to f$. Namun kekonvergenan subbarisan dari suatu barisan Cauchy mengakibatkan barisan itu sendiri konvergen ke limit yang sama. Ini mengakhiri pembuktian. (QED)

7.2 Ketaksamaan Bessel

Teorema (Ketaksamaan Bessel) Jika $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah himpunan ortonormal di $L^2(a,b)$ dan $f \in L^2(a,b)$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$\langle f, \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \rangle = \overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle f, \phi_n \rangle = |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

dan menurut Teorema Pythagoras,

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Akibatnya, untuk setiap $N \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq \Big\| f - \sum_{i=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

yang mengakibatkan

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Dengan mengambil $N \to \infty$, kita dapatkan ketaksamaan yang diinginkan. [QED]

Selanjutnya, diberikan suatu himpunan ortonormal $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ di $L^2(a,b)$, apakah

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

untuk setiap $f \in L^2(a,b)$?

Lemma. Jika $f \in L^2(a,b)$ dan $\{\phi_n\}_1^\infty$ ortonormal di $L^2(a,b)$, maka $\sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ konvergen dalam norm dan $\left\|\sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right\| \le \|f\|$.

Bukti. Menurut Ketaksamaan Bessel, $\sum_{n=1}^\infty |\langle f, \phi_n\rangle|^2$. Karena itu, menurut Teorema Pythagoras,

$$\left\|\sum_{n=M}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right\| = \sum_{n=M}^{N} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \to 0,$$

bila $M, N \to \infty$. Jadi jumlah parsial dari $\sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ membentuk barisan Cauchy di $L^2(a,b)$. Karena $L^2(a,b)$ lengkap, deret ini konvergen dalam norm. Selanjutnya, karena $\|\cdot\|$ kontinu, kita peroleh

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right\|^2 = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2.$$

7.3 Basis Ortonormal di $L^2(a,b)$

Teorema. Misal $\{\phi_n\}_1^\infty$ adalah suatu himpunan ortonormal di $L^2(a,b)$. Ketiga pernyataan berikut ekuivalen:

(a) Jika $\langle f, \phi_n\rangle = 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, maka $f = 0$.

(b) Untuk setiap $f \in L^2(a,b)$ berlaku $f = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ (dalam norm).

(c) Untuk setiap $f \in L^2(a,b)$ berlaku $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle f, \phi_n\rangle|^2$ (Kesamaan Parseval).

Bukti. Akan dibuktikan (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a). Pertama, misal (a) berlaku. Telah dibuktikan pada lemma sebelumnya bahwa $\sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ konvergen dalam norm. Untuk menunjukkan bahwa jumlahnya adalah f, kita tinjau $g := f - \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$. Perhatikan bahwa

$$\langle g, \phi_m\rangle = \langle f, \phi_m\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle \langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0,$$

untuk tiap $m \in \mathbf{N}$. Menurut hipotesis, kita peroleh $g = 0$. Jadi $f = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$.

Sekarang, misalkan (b) berlaku. Menurut Teorema Pythagoras dan fakta bahwa $\|\cdot\|$ kontinu,

$$\|f\|^2 = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2.$$

Akhirnya, misalkan (c) berlaku, dan $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Maka, $\|f\| = 0$, dan karena itu $f = 0$. (QED)

`Catatan`. Himpunan ortonormal $\{\phi_n\}_1^\infty$ yang memenuhi (a), atau (b), atau (c), pada teorema di atas, disebut *himpunan ortonormal lengkap* atau *basis ortonormal* untuk $L^2(a, b)$. Bila persyaratan ortonormal diganti dengan ortogonal, maka kita peroleh *basis ortogonal* untuk $L^2(a, b)$.

7.4 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $\| \cdot \|$ merupakan pemetaan yang kontinu, yakni jika $f_n \to f$ dalam norm, maka $\|f_n\| \to \|f\|$ (bila $n \to \infty$).
2. Buktikan bahwa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ merupakan pemetaan yang kontinu terhadap masing-masing komponen, khususnya jika $f_n \to f$ dalam norm, maka $\langle f_n, g \rangle \to \langle f, g \rangle$ untuk setiap $g \in L^2(a, b)$.
3. Misalkan $\{\phi_n\}_1^\infty$ basis ortonormal untuk $L^2(a, b)$. Buktikan bahwa untuk setiap $f, g \in L^2(a, b)$ berlaku $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle g, \phi_n \rangle}$.
4. Hitung jumlah deret berikut dengan menerapkan Kesamaan Parseval untuk fungsi f tertentu:
   (a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$.
   (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^6}$.