8. Deret Fourier yang Diperumum dan Hampiran Terbaik di $L^2(a,b)$

8.1 Deret Fourier yang Diperumum

Jika $\{\phi_n\}_1^\infty$ adalah basis ortonormal untuk $L^2(a,b)$ dan $f \in L^2(a,b)$, maka $\langle f, \phi_n\rangle$ disebut *koefisien Fourier yang diperumum* dari f terhadap $\{\phi_n\}_1^\infty$, dan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ disebut *deret Fourier yang diperumum* dari f terhadap $\{\phi_n\}_1^\infty$.

Pertanyaan kita adalah: apakah himpunan ortonormal pada pembahasan deret Fourier klasik merupakan basis ortonormal, yakni apakah $f = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n\rangle \phi_n$ untuk setiap $f \in L^2(-\pi,\pi)$? Ingat bahwa kita baru membuktikan ini untuk fungsi di $PS(a,b)$.

Teorema. (a) Himpunan $\{e^{inx}\}_{-\infty}^\infty$ dan $\{\cos nx\}_1^\infty \cup \{\sin nx\}_1^\infty$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(-\pi,\pi)$.

(b) Himpunan $\{\cos nx\}_0^\infty$ dan $\{\sin nx\}_1^\infty$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(0,\pi)$.

Bukti. Akan dibuktikan (a) bagian pertama saja, yang berkenaan dengan himpunan $\{e^{inx}\}_{-\infty}^\infty$. Bagian lainnya dapat dibuktikan secara serupa.

Misalkan $f \in L^2(-\pi,\pi)$ dan $\epsilon > 0$. Berdasarkan teorema tentang topologi ruang $L^2(a,b)$ secara umum, terdapat fungsi $\tilde{f}$ yang kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $[-\pi,\pi]$ sedemikian sehingga $\|f - \tilde{f}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Misalkan $c_n = \frac{1}{2\pi}\langle f, \psi_n\rangle$ dan $\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi}\langle \tilde{f}, \psi_n\rangle$, dengan $\psi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbf{Z}$, adalah koefisien Fourier dari f dan $\tilde{f}$, berturut-turut. Menurut teorema kekonvergenan seragam deret Fourier, $\sum_{n=-\infty}^\infty \tilde{c}_n \psi_n$ konvergen seragam ke $\tilde{f}$. Akibatnya, jika N cukup besar, maka

$$\Big\| \tilde{f} - \sum_{n=-N}^{N} \tilde{c}_n \psi_n \Big\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Selanjutnya, menurut Teorema Pythagoras dan Ketaksamaan Bessel,

$$\Big\| \sum_{n=-N}^{N} \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n \psi_n \Big\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\tilde{c}_n - c_n|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n - c_n|^2 \le \|\tilde{f} - f\|^2 < \big(\frac{\epsilon}{3}\big)^2.$$

Jadi, jika kita tulis

$$f - \sum_{n=-N}^{N} c_n\psi_n = (f - \tilde{f}) + \Big(\tilde{f} - \sum_{n=-N}^{N} \tilde{c}_n\psi_n\Big) + \Big(\sum_{n=-N}^{N} \tilde{c}_n\psi_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n\psi_n\Big),$$

dan gunakan Ketaksamaan Segitiga, maka kita peroleh

$$\Big\|f - \sum_{n=-N}^{N} c_n\psi_n\Big\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Jadi $f = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\psi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\psi_n$ dalam norm, dan ini membuktikan bahwa himpunan fungsi $\{\psi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(-\pi, \pi)$. (QED)

Sebagai rangkuman, sejauh ini kita telah membahas: jika f periodik, maka deret Fourier dari f akan konvergen ke f

(i) secara seragam, mutlak, dan dalam norm, untuk f yang kontinu dan mulus bagian demi bagian pada $[a, b]$;

(ii) secara titik demi titik, untuk f yang mulus bagian demi bagian pada $[a, b]$;

(iii) dalam norm, untuk $f \in L^2(a, b)$.

8.2 Hampiran Terbaik di $L^2(a, b)$

Teorema berikut menyatakan bahwa deret dengan koefisien Fourier untuk f (terhadap suatu himpunan ortonormal di $L^2(a, b)$) merupakan hampiran terbaik untuk f di antara semua uraian deret yang mungkin (terhadap himpunan ortonormal tersebut).

Teorema. Misalkan $\{\phi_n\}$ adalah suatu himpunan fungsi ortonormal, yang terhingga atau terbilang banyaknya, di $L^2(a, b)$. Maka

$$\|f - \sum \langle f, \phi_n\rangle\phi_n\| \leq \|f - \sum c_n\phi_n\|$$

untuk sembarang pilihan $\{c_n\}$ dengan $\sum |c_n|^2 < \infty$. Lebih jauh, kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $c_n = \langle f, \phi_n\rangle$ untuk setiap indeks n.

Bukti. Kita tulis

$$f - \sum c_n\phi_n = \Big(f - \sum \langle f, \phi_n\rangle\phi_n\Big) + \sum \big[\langle f, \phi_n\rangle - c_n\big]\phi_n.$$

Perhatikan bahwa $g := f - \sum\langle f, \phi_n\rangle\phi_n \perp \phi_m$ atau $\langle g, \phi_m\rangle = 0$, untuk setiap m. Jadi, $g \perp \sum\big[\langle f, \phi_n\rangle - c_n\big]\phi_n$, sehingga menurut Teorema Pythagoras,

$$\left\|f - \sum c_n\phi_n\right\|^2 = \left\|f - \sum\langle f, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2 + \sum|\langle f, \phi_n\rangle - c_n|^2 \geq \left\|f - \sum\langle f, \phi_n\rangle\phi_n\right\|^2,$$

dan kesamaan dipenuhi jika dan hanya $c_n = \langle f, \phi_n\rangle$ untuk setiap n. (QED)

8.3 Masalah Sturm-Liouville Reguler

Himpunan fungsi ortogonal $\{\cos nx\}_0^\infty$ dan $\{\sin nx\}_1^\infty$ di $L^2(0, \pi)$ diperoleh dari masalah nilai batas

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0$$

dan

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Demikian juga himpunan fungsi ortogonal $\{e^{-inx}\}$ di $L^2(-\pi, \pi)$ dapat diperoleh dari masalah nilai batas

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(-\pi) = u(\pi),\ u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Pada bagian ini kita akan melihat bahwa ada (banyak) masalah nilai batas yang berujung pada himpunan fungsi ortogonal du $L^2(a, b)$.

Secara khusus, kita akan membahas masalah Sturm-Liouville reguler, yang berbentuk

$$(rf')' + pf + \lambda wf = 0,$$

dengan syarat batas $B_1(f) = 0$ dan $B_2(f) = 0$. Di sini r, r' dan p bernilai real dan kontinu pada $[a, b]$, $r > 0$ pada $[a, b]$, dan $w > 0$ dan kontinu pada $[a, b]$. Sementara itu, B_1 dan B_2 merupakan fungsional yang *self-adjoint*. Lebih khusus lagi, kita akan meninjau masalah Sturm-Liouville berikut pada $[0, L]$:

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f'(0) = \alpha f(0),\ f'(L) = \beta f(L). \qquad (*)$$

Di sini λ merupakan nilai eigen dari operator $-T$, dengan $Tf = f''$. Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dari masalah ini senantiasa bernilai real.

Perhatikan jika $\lambda = 0$, maka $f'' = 0$ memberikan $f(x) = c_1 + c_2 x$, dan dari syarat batas kita peroleh $c_2 = \alpha c_1$ dan $c_2 = \beta(c_1 + c_2 L)$. Akibatnya $c_1 = c_2 = 0$ atau $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha L}$. Tentu saja kita tidak menghendaki solusi trivial $f = 0$, karena itu kita penuhi $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha L}$ dan ambil $c_1 = 1,\ c_2 = \alpha$.

Selanjutnya, kita asumsikan $\lambda \neq 0$, katakan $\lambda = \nu^2$ dengan $\nu > 0$ atau $\nu = -\mu i,\ \mu > 0$ (tergantung apakah $\lambda > 0$ atau $\lambda < 0$). Solusi umum dari (*) adalah

$$f(x) = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x.$$

Karena $f(0) = c_1$ dan $f'(0) = \nu c_2$, syarat batas di 0 memberikan $\nu c_2 = \alpha c_1$. Dalam hal ini, ambil $c_1 = \nu$ dan $c_2 = \alpha$, sehingga

$$f(x) = \nu \cos \nu x + \alpha \sin \nu x. \qquad [1]$$

Sekarang syarat batas di L akan memberikan

$$-\nu^2 \sin \nu L + \alpha \cos \nu L = \beta(\nu \cos \nu L + \alpha \sin \nu L)$$

atau

$$(\alpha - \beta)\nu \cos \nu L = (\alpha\beta + \nu^2) \sin \nu L$$

atau

$$\tan \nu L = \frac{(\alpha - \beta)\nu}{\alpha\beta + \nu^2}. \qquad [2a]$$

Jika $\nu = \mu i$, maka (mengingat $\tan ix = i \tanh x$) persamaan [2a] menjadi

$$\tanh \mu L = \frac{(\alpha - \beta)\mu}{\alpha\beta - \mu^2}. \qquad [2b]$$

Dalam kedua kasus, kita hanya perlu meninjau nilai ν dan μ positif karena nilai eigen dari operator $-T$ adalah ν^2 atau $-\mu^2$.

Jika ν memenuhi [2a], maka fungsi f yang memenuhi [1] merupakan fungsi eigen untuk masalah (*). Secara umum, f tidak normal, namun kita dapat menormalisasi f bila dikehendaki.

Untuk memberikan gambaran fungsi eigen seperti apa yang diperoleh, tinjau kasus $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ L = \pi$. Dalam hal ini, persamaan [2a] menjadi

$$\tan \nu\pi = \frac{2\nu}{\nu^2 - 1}, \qquad [2c]$$

sementara persamaan [2b] menjadi

$$\tanh \mu\pi = -\frac{2\mu}{\mu^2 + 1}. \qquad [2d]$$

Ada banyak solusi persamaan [2c]: $0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$ dengan $\nu_n \approx n - 1$ untuk n besar, namun tidak ada satupun solusi positif persamaan [2d]. Jadi, terdapat tak terhingga banyak nilai eigen $\lambda_n = \nu_n^2$ untuk (*), dengan $\lambda_n \approx (n-1)^2$ untuk n besar. Fungsi eigen yang berpadanan dengan λ_n adalah

$$f_n(x) = \nu_n \cos \nu_n x + \sin \nu_n x.$$

Dapat diperiksa bahwa himpunan fungsi eigen ini membentuk himpunan ortogonal terhadap hasilkali dalam $\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx$, dengan $w \equiv 1$ untuk contoh yang sedang kita bahas pada kesempatan ini.

8.4 Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = x,\ x \in [0, \pi]$. Tentukan hampiran terbaik (dalam norm) untuk f, di antara fungsi-fungsi yang berbentuk
   (a) $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$.
   (b) $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$.
   (c) $a \cos x + b \sin x$.
2. Buktikan bahwa himpunan fungsi eigen $\{f_n\}$ pada §8.3 merupakan himpunan ortogonal.