9. Polinom Legendre, Basis Haar, dan Basis Walsh

Beberapa basis ortogonal untuk $L^2(a,b)$ merupakan himpunan polinom. Selain itu, terdapat pula basis ortogonal lainnya yang menarik.

9.1 Himpunan Polinom Ortogonal

Misalkan (a,b) suatu selang terbuka di $\mathbf{R}$ dan $w(x)$ fungsi bernilai positif pada (a,b) sehingga $\int_a^b x^n w(x)\,dx$ konvergen mutlak untuk $n = 0,1,2,\ldots$. Maka, terdapat tepat satu barisan polinom $\{p_n\}_0^\infty$ yang berbentuk

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_1(x) &= x + a_0 \\
p_2(x) &= x^2 + b_1 x + b_0 \\
p_3(x) &= x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

yang saling ortogonal terhadap bobot w pada (a,b), yakni

$$\langle p_i, p_j \rangle_w = \int_a^b p_i(x) p_j(x) w(x)\,dx = 0, \quad i \neq j.$$

Dalam hal ini, konstanta dapat diperoleh dari $\langle p_1, p_0 \rangle_w = 0$, yaitu

$$a_0 = -\frac{\int_a^b x w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}.$$

Selanjutnya, konstanta b_0 dan b_1 dapat diperoleh dari $\langle p_2, p_0 \rangle_w = 0$ dan $\langle p_2, p_1 \rangle_w = 0$. Bila diteruskan, maka pada langkah ke-n, terdapat n persamaan dan n konstanta yang hendak dicari nilainya.

Lemma. Misalkan $\{p_n\}_0^\infty$ barisan polinom dengan p_n berderajat n untuk tiap $n = 0,1,2,\ldots$. Maka, setiap polinom berderejat k $(k = 0,1,2,\ldots)$ merupakan kombinasi linear dari $p_0, p_1, \ldots, p_k$.

Sebagai akibat lemma ini, himpunan polinom di atas merentang ruang polinom pada (a, b).

9.2 Polinom Legendre

Himpunan polinom yang akan dipelajari berikut ini merupakan himpunan fungsi eigen dari suatu Masalah Sturm-Liouville Singular, namun kita tidak akan membahasnya melalui masalah nilai batas seperti pada bab sebelumnya, melainkan melalui rumus Rodrigues

$$p_n(x) = \frac{C_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) Q(x)^n]$$

ddengan C_n konstanta normalisasi, $w(x)$ fungsi bobot (sehingga $p_i \perp p_j$ terhadap w), dan $Q(x)$ adalah suatu polinom tertentu. Dari rumus ini, kita dapat membuktikan keortogonal di antara p_i dan p_j untuk $i \neq j$, menurunkan persamaan diferensial yang dipenuhi oleh p_n, dan menentukan konstanta normalisasinya.

Untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$, *polinom Legendre* didefinisikan sebagai

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Catat bahwa $(x^2 - 1)^n$ adalah polinom berderajat $2n$, sehingga P_n merupakan polinom berderajat n. Di sini, $w(x) \equiv 1$. Untuk beberapa nilai n pertama, kita dapatkan rumus untuk P_n:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &- \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Secara umum,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \cdots.$$

Teorema. Himpunan polinom Legendre $\{P_n\}_0^\infty$ ortogonal di $L^2(0, 1)$ dengan $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

Bukti. Jika f adalah fungsi $C^{(n)}$ pada $[-1,1]$, maka (dengan pengintegralan parsial sebanyak n kali)

$$2^n n!\langle f, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.$$

Akibatnya, untuk $m < n$, kita peroleh $\langle P_m, P_n\rangle = 0$. Dengan menukar peran m dan n, jika juga peroleh $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ untuk $m > n$.

Selanjutnya, dengan mengambil $f = P_n$, kita dapatkan

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n = \frac{2}{n+1}.$$

(QED)

Teorema. Polinom P_n memenuhi persamaan diferensial

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Teorema. Himpunan $\{P_n\}_0^\infty$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(-1,1)$.

9.3 Basis Haar dan Basis Walsh

Selain himpunan polinom, terdapat basis ortonormal lainnya untuk $L^2(0,1)$ yang menarik, khususnya *basis Haar* dan *basis Walsh.*

Basis Haar adalah himpunan fungsi $H := \{h_0\} \cup \{h_{jn} : j \geq 0, 0 \leq n < 2^j\}$, dengan

$$h_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya;} \end{cases}$$

dan

$$h_{jn}(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j} < x < 2^{-j}(n+1/2), \\ -2^{j/2}, & \text{jika } 2^{-j}(n+1/2) < x < 2^{-j}(n+1), \\ 0, & \text{jika } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

[Gambar 9.1: Beberapa Fungsi Haar]

Catat bahwa fungsi h_{00} berbeda dari fungsi h_0.

Teorema. Himpunan fungsi H ortonormal dan lengkap di $L^2(0,1)$.

Selanjutnya, definisikan *fungsi Rademacher* r_i sebagai 'fungsi tangga sinusoidal' berperiode 2^{-i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$; yakni $r_i(x) = (-1)^{d_n(x)}$ dengan $d_n(x)$ adalah dijit ke-n dari representasi biner $x = [0.d_1 d_2 \ldots]_2$.

[Gambar 9.2: Beberapa Fungsi Rademacher]

Untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$, fungsi Walsh w_n didefinisikan sebagai berikut:

$$w_0(x) := r_0(x)$$

dan untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$w_n(x) := r_1(x)^{b_1} \cdots r_k(x)^{b_k}$$

dengan $n = [b_k \cdots b_1]_2$ menyatakan representasi biner dari n. Jadi, sebagai contoh, $w_1(x) = r_1(x)$, $w_2(x) = r_2(x)$, $w_3(x) = r_1(x)r_2(x)$, dan seterusnya.

[Gambar 9.3: Beberapa Fungsi Walsh]

Teorema. Himpunan fungsi Walsh $\{w_n\}_0^\infty$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(0,1)$.

9.4 Soal Latihan

1. Buktikan bahwa himpunan polinom Legendre $\{P_{2n}\}_0^\infty$ dan $\{P_{2n+1}\}_0^\infty$ merupakan basis ortogonal untuk $L^2(0,1)$.
2. Buktikan bahwa himpunan fungsi Haar ortonormal.
3. Buktikan bahwa himpunan fungsi Walsh ortonormal.