Soal §7.3, No. 2 (Folland, hal. 235)

Persamaan Panas Tak Homogen

Gunakan Transformasi Fourier untuk membuktikan bahwa solusi persamaan panas tak homogen

$$u_t = ku_{xx} + G(x,t)$$

dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ adalah

$$u(x,t) = K_t * f(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K_{t-s}(x-y)G(y,s)\,dy\,ds,$$

dengan $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$.

Jawab: Kenakan transformasi Fourier pada kedua ruas persamaan, kita peroleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi,t) = -k\xi^2\widehat{u}(\xi,t) + \widehat{G}(\xi,t).$$

Ini adalah persamaan diferensial linear orde 1 (untuk $\widehat{u}$). Kalikan dengan faktor pengintegralnya, yaitu $e^{k\xi^2 t}$, persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{k\xi^2 t}\widehat{u}(\xi,t)\Big) = e^{k\xi^2 t}\widehat{G}(\xi,t).$$

Dari sini kita dapatkan

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-k\xi^2 t}\Big[C(\xi) + \int_0^t e^{k\xi^2 s}\widehat{G}(\xi,s)\,ds\Big].$$

Syarat awal $\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)$ dalam hal ini akan memberikan $C(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, sehingga

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-k\xi^2 t}\widehat{f}(\xi) + \int_0^t e^{-k\xi^2(t-s)}\widehat{G}(\xi,s)\,ds.$$

Mengingat bahwa $e^{-k\xi^2 t} = \widehat{K}_t(\xi)$, kita peroleh

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(\xi,t) &= (K_t * f)\widehat{\ }(\xi) + \int_0^t \big[K_{t-s}(\cdot) * G(\cdot,s)\big]\widehat{\ }(\xi)\,ds \\
&= (K_t * f)\widehat{\ }(\xi) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \big[K_{t-s}(\cdot) * G(\cdot,s)\big](x) e^{-i\xi x} dx\,ds \\
&= (K_t * f)\widehat{\ }(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \big[K_{t-s}(\cdot) * G(\cdot,s)\big](x)\,ds\, e^{-i\xi x}\,dx.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Inversi Fourier, kita simpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= K_t * f(x) + \int_0^t [K_{t-s}(\cdot) * G(\cdot,s)](x)\,ds \\
&= K_t * f(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K_{t-s}(x-y) G(y,s)\,dy\,ds,
\end{aligned}$$

sesuai dengan yang diharapkan. (QED)