Tugas 1 No. 2

Fenomena Gibbs (Rujukan: Folland, hal. 61)

Diketahui deret Fourier $\pi - \theta = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\theta}$ untuk $0 < \theta < 2\pi$. Misalkan

$$g_N(\theta) := 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\theta}{n} - (\pi - \theta),$$

yakni $g(\theta)$ adalah selisih antara $f(\theta) := \pi - \theta$ dan jumlah parsial Fourier ke-N untuk $0 < \theta < 2\pi$.

(a) Buktikan bahwa $g_N'(\theta) = 2\pi D_N(\theta)$ dengan D_N menyatakan kernel Dirichlet (yang dibahas pada Bab 3).

Jawab: Untuk $0 < \theta < 2\pi$, kita mempunyai

$$g_N'(\theta) = 2\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta + 1 = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = 2\pi D_N(\theta).$$

(b) Buktikan bahwa titik kritis pertama dari $g_N(\theta)$ di sebelah kanan 0 tercapai di $\theta_N = \frac{\pi}{N+1/2}$, dan

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}\, d\theta - \pi.$$

Jawab: Berdasarkan Teorema Dasar kalkulus, kita mempunyai

$$g_N(\theta) = \int_0^{\theta} g_N'(\phi)\, d\phi - \pi.$$

Perhatikan bahwa $g_N(0) = -\pi$. Selanjutnya, mengingat $g_N'(\theta) = 2\pi D_N(\theta) = \frac{\sin(N+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}$, maka

$$g_N(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin(N+1/2)\phi}{\sin(\phi/2)}\, d\phi - \pi.$$

Sementara itu, $g'_N(\theta) = 0$ terjadi jika dan hanya jika $\sin(N+1/2)\theta = 0$, yakni jika dan hanya jika $\theta = \frac{k\pi}{N+1/2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Jadi titik kritis pertama dari $g_N(\theta)$ di sebelah kanan 0 adalah $\theta_N = \frac{\pi}{N+1/2}$, dan

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}\, d\theta - \pi,$$

sebagaimana diharapkan.

(c) Buktikan bahwa

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\theta_N) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{\phi}\, d\phi - \pi.$$

Jawab: Substitusi $\varphi := (N+1/2)\phi$ pada integral di atas memberikan

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi/2}{N+1/2}} \frac{d\varphi}{N+1/2}.$$

Ketika $N \to \infty$, $\sin\frac{\varphi/2}{N+1/2} \cdot (N+1/2) \to \frac{\varphi}{2}$. Jadi, kita peroleh

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\theta_N) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, d\varphi - \pi,$$

sebagaimana diharapkan.

`Catatan`. Nilai limit di atas kira-kira sama dengan 0.562. Jadi selisih antara $f(\theta)$ dan jumlah parsial ke-N memberikan suatu loncatan (*overshoot*) setinggi 0.562 (pada suatu interval yang semakin sempit) di sebelah kanan 0. Fenomena ini dikenal sebagai Fenomena Gibbs, yang ditemukan oleh ilmuwan Amerika Serikat bernama Josiah Willard Gibbs (1839-1903).