Program Studi Magister Matematika – FMIPA ITB

UJIAN MA5232 ANALISIS FOURIER

Dosen: Hendra Gunawan, Ph.D.

Selasa, 8 April 2014, Pkl. 09:00-11:00 (120 menit)

Kerjakan 5 soal di bawah ini. Nilai maksimum tiap soal tertera di samping nomor soal. Kerjakan soal yang anda anggap lebih mudah terlebih dahulu. Jangan lupa untuk menuliskan nama dan NIM anda pada tiap halaman.

1. (a) [6 poin] Misalkan $f(x) := x^2$ untuk $-\pi \le x \le \pi$, dan $f(x + 2\pi) = f(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Buktikan rumus deret Fourier untuk f yang diberikan dalam tabel.

(b) [3 poin] Apakah deret Fourier pada (a) konvergen ke f secara seragam atau hanya titik demi titik? Jelaskan.

(c) [3 poin] Tentukan jumlah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

2. [12 poin] Menggunakan Metode Pemisahan Peubah, tentukan fungsi (dalam bentuk deret Fourier) yang memenuhi persamaan panas

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi,$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = x$ dan syarat batas $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$. [Catatan. Tabel deret Fourier dapat digunakan.]

3. (a) [3 poin] Buktikan dengan Induksi Matematika bahwa $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. [Catatan: Soal bagian ini boleh dikerjakan belakangan setelah bagian (b)].

(b) [9 poin] Tentukan nilai konstanta $a, b, p, q,$ dan r sedemikian sehingga $f_0(x) := 1$, $f_1(x) := ax + b$, dan $f_2(x) := px^2 + qx + r$ merupakan himpunan ortonormal di $L^2_w(0, \infty)$ dengan $w(x) := e^{-x}$. [Catatan: $f \in L^2_w(0, \infty)$ berarti $\|f\|^2_{L^2_w} := \int_0^\infty |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty$.]

4. [12 poin] Kerjakan **salah satu** di antara dua soal berikut:

(4.1) Untuk $t > 0$ misalkan $f_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Buktikan bahwa $f_t * f_s = f_{t+s}$.

(4.2) Untuk $t > 0$ misalkan $g_t(x) := \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$. Buktikan bahwa $g_t * g_s = g_{t+s}$.

5. Dispersi dari f di sekitar a didefinisikan sebagai

$$\Delta_a f(x) := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

Misalkan $f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

(a) [5 poin] Buktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2 dx$.

(b) [7 poin] Dengan kesamaan Plancherel dll, buktikan bahwa f memenuhi **kesamaan**

$$(\Delta_0 f)(\Delta_0 \widehat{f}) = \frac{1}{4}.$$