

Program Studi Magister Matematika - FMIPA ITB

Ujian II - MA5232 Analisis Fourier

Dosen: Hendra Gunawan, Ph.D.

Kamis, 8 Mei 2014, Pkl. 09.00-11.00 (120 menit)

Nilai maksimum tiap soal tertera di sebelah nomor soal tersebut.

Kerjakan soal yang menurut anda lebih mudah terlebih dahulu.

1. Diketahui $\phi := \chi_{[0,1)}$, $\psi := \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}$, dan $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$.
- (a) [3 poin] Nyatakan ϕ sebagai deret $\sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}$, dengan **menggunakan** fakta bahwa $\{\psi_{j,k}\}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(\mathbf{R})$.

(b) [2 poin] Nyatakan

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 5, & \text{jika } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 3, & \text{jika } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 7, & \text{jika } \frac{3}{4} \leq x < 1, \end{cases}$$

sebagai kombinasi linear dari $\phi, \psi, \psi_{1,0}$, dan $\psi_{1,1}$.

2. Diketahui $\psi(x) := \frac{\sin 2\pi x - \sin \pi x}{\pi x}$ dan $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbf{Z}$.
- (a) [2 poin] Buktikan bahwa $\widehat{\psi} = \chi_I$ dengan $I := [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$.
- (b) [3 poin] Buktikan bahwa $\{\psi_{j,k}\}$ merupakan **himpunan** ortonormal.
3. Diketahui $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$ suatu Analisis Multi-Resolusi pada $L^2(\mathbf{R})$. Buktikan bahwa
- (a) [1 poin] jika $f \in V_j$, maka $f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j$.
- (b) [2 poin] jika $f \in V_0$, maka $f(2^j \cdot - k) \in V_j$.
- (c) [2 poin] jika $V_1 = V_0 \oplus W_0$, maka $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ dengan $W_j := \{f(2^j \cdot) : f \in W_0\}$.
4. (a) [2 poin] Buktikan bahwa $u_1 := (1, 0)$, $u_2 := (0, 1)$, $u_3 := (-1, 0)$, dan $u_4 := (0, -1)$ membentuk suatu *frame* ketat di \mathbf{R}^2 .
- (b) [3 poin] Selidiki apakah $v_n := (\cos \frac{n\pi}{4}, \sin \frac{n\pi}{4})$, $n = 0, 1, \dots, 7$, membentuk suatu *frame* ketat di \mathbf{R}^2 . (*Petunjuk*: Plot vektor posisi v_0, \dots, v_7 di \mathbf{R}^2 .)