SOLUSI VERSI SINGKAT
UJIAN 1 - MA5033 Topologi
Semester I Tahun 2016-2017

1. Salah satu contoh koleksi himpunan yang memenuhi kondisi yang ditentukan adalah $F_n := [\frac{1}{n}, 1],\ n \in \mathbf{N}$, dengan $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, \frac{1}{n}]$.

2. Misalkan U buka di ruang metrik X. Untuk setiap $x \in U$, terdapat bola buka B_x sedemikian sehingga $x \in B_x \subseteq U$. Maka, dapat diperiksa bahwa $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.
Sebaliknya, jika $U = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$ dengan B_α bola buka di X untuk setiap α, maka U buka di X.

3. Soal ini 'cacat', seharusnya X diasumsikan lengkap. Misalkan X lengkap dan $A = \bigcup F_n$ himpunan kategori I, dengan F_n tak padat di mana-mana untuk setiap n. Ambil $V \subseteq X$ buka dan tak kosong. Pilih himpunan tutup $U_1 \subseteq V \setminus F_1$ (mengingat F_1 tak padat di mana-mana). Selanjutnya, secara induktif, setelah U_k dipilih, kita pilih himpunan tutup $U_{k+1} \subseteq U_k \setminus F_{k+1}$. Maka, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $V \setminus A$. Ini membuktikan bahwa $X \setminus A$ padat.

4. (a) Misalkan $f : X \to Y$ kontinu seragam dan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy di X. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang. Pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ untuk $d_X(x, y) < \delta$. Selanjutnya, pilih $N \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $d_X(x_m, x_n) < \delta$ untuk $m, n \geq N$. Maka, $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$ untuk $m, n \geq N$. Jadi $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy di Y.

(b) Fungsi $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ dengan $f(x) := \frac{1}{x}$ kontinu. Pilih $X_n := \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}$. Maka, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy tetapi $(f(x_n))_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$ bukan barisan Cauchy.

5. Misalkan $U \subseteq X$, sebutlah $U = \bigcup \mathcal{G}$ untuk suatu $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$. Ambil $x \in U$. Maka, $x \in B_x$ untuk suatu $B_x \in \mathcal{G}$. Dalam hal ini, $x \in B_x \subseteq U$.
Sebaliknya, misalkan untuk setiap $x \in U$ terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subseteq U$. Maka, seperti pada Soal 2, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ merupakan himpunan buka di X.

6. Misalkan A padat di $\mathbf{M}$, dan misalkan x irasional. Maka $\{x\}$ buka di $\mathbf{M}$, sehingga $A \cap \{x\} \neq \emptyset$. Ini berarti bahwa $x \in A$. Karena x sembarang, maka A mestilah memuat semua bilangan irasional.