Program Studi S2 Matematika – FMIPA ITB

UJIAN I MA5033 PENGANTAR TOPOLOGI

Dosen: Hendra Gunawan, Ph.D.

Rabu, 12 Oktober 2016, Pkl. 09:00-10:50 (110 menit)

Kerjakan soal-soal di bawah ini, mulai dari yang anda anggap paling mudah terlebih dahulu. Nilai maksimum untuk tiap soal tertera dalam tanda kurung [ ] di sebelah kanan nomor soal tersebut. Nilai total yang dapat anda raih dari ujian ini adalah 40. Tuliskan jawaban untuk setiap soal sebaik-baiknya.

1.[4] Berikan suatu contoh koleksi himpunan tutup $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tidak tutup.

2.[6] Misalkan (X, d) ruang metrik dan $U \subseteq X$. Buktikan bahwa U buka jika dan hanya jika U dapat dituliskan sebagai gabungan dari suatu koleksi bola buka di X.

3.[6] Misalkan X ruang metrik. Buktikan jika $A \subseteq X$ adalah himpunan kategori I, maka $X \setminus A$ merupakan himpunan yang padat di X.

4.(a)[6] Misalkan X dan Y ruang metrik dan $f : X \to Y$ fungsi kontinu seragam. Buktikan jika $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy di X, maka $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy di Y.

(b)[4] Berikan contoh yang menegaskan bahwa kekontinuan seragam pada soal bagian (a) merupakan hipotesis esensial.

5.[7] Misalkan (X, τ) ruang topologi dan $\mathcal{B}$ adalah suatu basis untuk X. Buktikan bahwa $U \subseteq X$ buka (yakni, $U \in \tau$) jika dan hanya jika untuk setiap $x \in U$ terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subseteq U$.

6.[7] Buktikan bahwa setiap himpunan padat di Garis Michael mestilah mengandung semua bilangan irasional.

Catatan. Garis Michael adalah $X = \mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan topologi

$$\tau_M := \{U \cup F : U \text{ buka terhadap topologi biasa di } \mathbb{R},\ F \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

***