Catatan Singkat: Ortogonalitas dan Normalitas

Khairul Basar

April 19, 2013

1 Ortogonalitas Fungsi

Ortogonal berarti tegak lurus. Tinjau dua buah vektor yaitu $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$, keduanya dikatakan ortogonal jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Jika masing-masing vektor tersebut dinyatakan dalam komponen-komponennya yaitu $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, maka kedua vektor tersebut dikatakan ortogonal bila

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0 \tag{1}$$

Konsep ortogonal pada vektor dalam ruang 3D tersebut dapat diperluas untuk vektor dalam ruang dengan dimensi lebih tinggi (dengan kata lain vektor yang mempunyai jumlah komponen lebih dari tiga). Jika diperluas lagi, konsep tersebut juga dapat diterapkan untuk vektor dengan jumlah komponen yang tak hingga banyaknya. Konsep tersebut digunakan untuk memberikan pengertian pada kondisi ortogonalitas dua buah fungsi. Dua buah fungsi $A(x)$ dan $B(x)$ dikatakan ortogonal pada interval $[a, b]$ jika

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0 \tag{2}$$

2 Normalitas Fungsi

Suatu vektor vektor $\mathbf{A}$ disebut sebagai vektor satuan atau vektor normal jika besar vektor tersebut sama dengan satu. Artinya $|\mathbf{A}| = 1$. Karena besar suatu vektor dapat dikaitkan dengan operasi dot product dua buah vektor yang sama, yaitu

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \tag{3}$$

Dengan demikian suatu vektor dikatakan sebagai vektor satuan atau vektor normal jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = 1$. Konsep tersebut dapat dikembangkan untuk memahami normalitas dari suatu fungsi. Suatu fungsi $A(x)$ dikatakan normal dalam interval $[a, b]$ jika

$$\int_a^b A(x)A(x)dx = \int_a^b (A(x))^2dx = 1 \tag{4}$$

Jika suatu vektor mempunyai besar yang tidak sama dengan satu, maka dengan membagi vektor tersebut dengan besarnya akan diperoleh vektor baru yang besarnya satu. Proses ini dinamakan penormalan atau normalisasi. Artinya membuat besar suatu vektor menjadi satu satuan. Hal yang sama juga dapat dipahami untuk suatu fungsi. Normalisasi suatu fungsi adalah proses membuat besar atau panjang fungsi tersebut dalam interval tertentu sama dengan satu.

3 Kumpulan Fungsi Yang Ortonormal

Tinjau kumpulan (set) suatu fungsi $\phi_k(x), k = 1, 2, 3, \ldots$ yang mempunyai sifat sebagai berikut

$$\begin{aligned} &\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \text{ untuk } m \neq n \\ &\text{dan} \\ &\int_a^b (\phi_m(x))^2 dx = 1, \text{ untuk } m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

maka artinya masing-masing anggota kumpulan (set) fungsi $\phi_m(x)$ tersebut tegak lurus dengan yang lainnya dan kumpulan fungsi tersebut juga ternormalisasi. Kumpulan (set) fungsi yang memenuhi kondisi ini dinamakan kumpulan (set) fungsi yang ***ortonormal***. Untuk lebih memudahkan penulisan, biasanya digunakan simbol lain yang menyatakan kondisi ortonormal tersebut yaitu dengan menggunakan simbol *delta kronecker*, δ_{mn}. Simbol delta kronecker mempunyai definisi sebagai berikut

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m = n \\ 0, & \text{untuk } m \neq n \end{cases} \tag{6}$$

Dengan memanfaatkan notasi delta kronecker tersebut, ortonormalitas suatu kumpulan fungsi dalam interval $[a, b]$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{7}$$

Salah satu contoh kumpulan fungsi yang ortogonal adalah kumpulan fungsi harmonik $\sin(mx)$ dan juga $\cos(mx)$ dalam interval $[-\pi, \pi]$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \pi\delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{mn} \end{aligned} \tag{8}$$