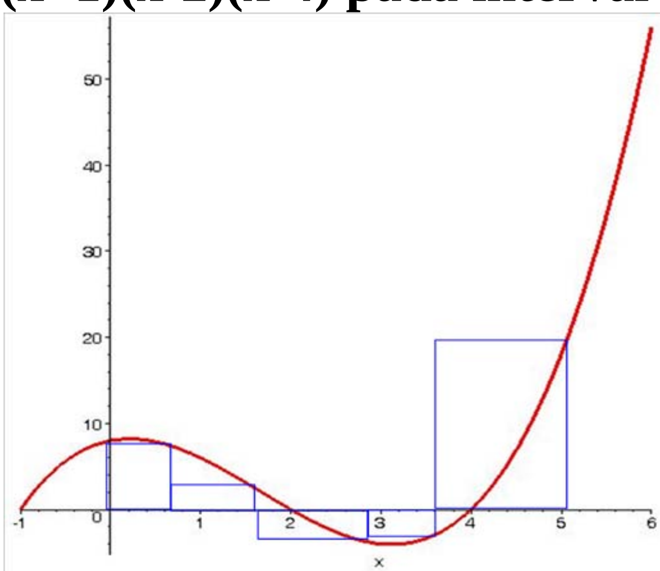
# Integral Lipat Dua

**Tujuan:**

1. **Mengingat kembali integral lipat dua dan mahir menghitungnya.**
2. **Memahami arti arti fisik dan geometri dari integral lipat dua.**
3. **Memahami cara transformasi koordinat pada integral lipat dua: koordinat kartesius dan kutub/polar.**

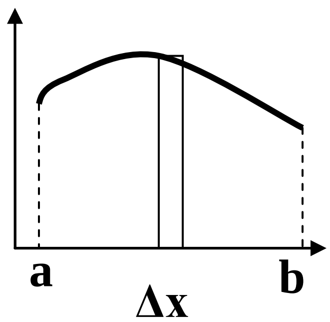
## Integral

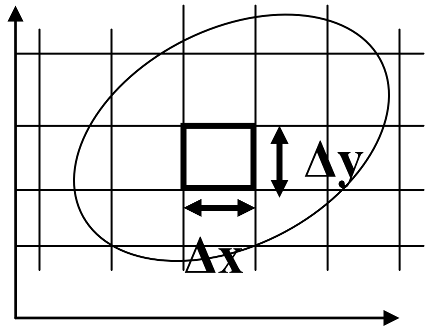
**Contoh: Contoh: Hitung jumlah Riemann untuk f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) pada interval [0,5]**




## Integral lipat dua

**integral tentu** **integral lipat dua**




$$\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

$$J = \int_a^b f(x)dx \qquad J = \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dA$$

**Sifat integral lipat dua:**

$$\iint_R kf\ dxdy = k\iint_R f\ dxdy$$

$$\iint_R (f+g)dxdy = \iint_R f\ dxdy + \iint_R g\ dxdy$$

$$\iint_R f\ dxdy = \iint_{R_1} f\ dxdy + \iint_{R_2} f\ dxdy, \quad R = R_1 + R_2$$

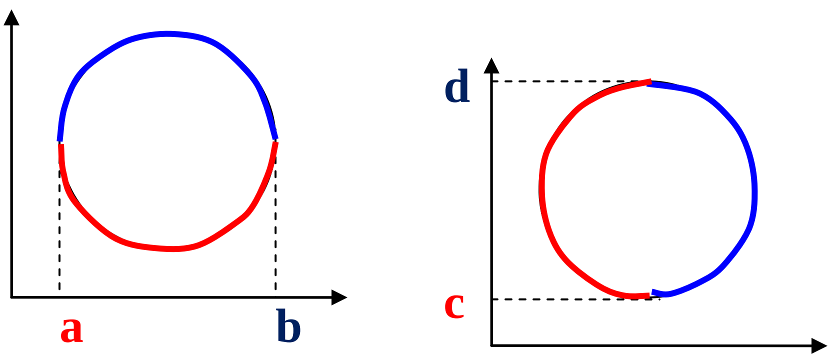
**Teorema Mean Value (Nilai Rata-rata)**

**Terdapat paling sedikit satu titik (x*,y*) di R yang memenuhi:**

$$\iint_R f(x,y)dxdy = f(x^*, y^*)A$$

**dimana A adalah luas daerah R.**

**Penghitungan integral lipat dua:**




**Jika a ≤ x ≤ b, g(x) ≤ y ≤ h(x), dimana y=g(x) dan y=h(x) adalah batas daerah R maka**

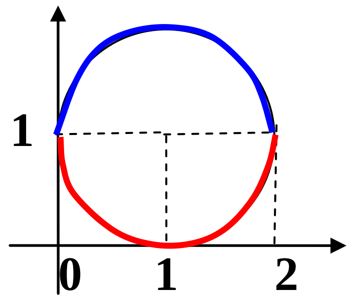
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

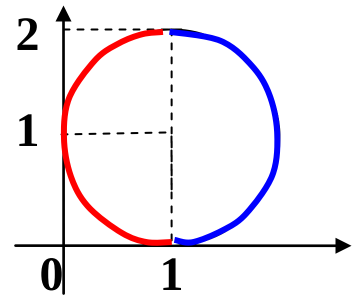
**Jika c ≤ y ≤ d, p(y) ≤ x ≤ q(y), dimana x=p(y) dan x=q(y) adalah batas daerah R maka**

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

**Contoh: fungsi** $f(x,y) = \cos 2x + xy^2$ **memiliki domain R merupakan lingkaran** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$**. Hitunglah** $\iint_R f(x,y)\,dxdy$**.**

**Domain R dapat didefinisikan sebagai berikut:**




**0 ≤ x ≤ 2, g(x) ≤ y ≤ h(x), dimana g(x) =** $y = \sqrt{1-(x-1)^2} + 1$ **dan h(x) =** $y = -\sqrt{1-(x-1)^2} + 1$ **(gambar kiri)**

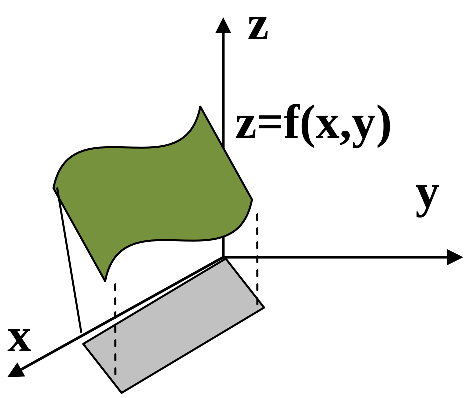
**Atau**

**0 ≤ y ≤ 2, p(y) ≤ y ≤ q(y), dimana p(y) =** $x = \sqrt{1-(y-1)^2} + 1$ **dan h(x) =** $x = -\sqrt{1-(y-1)^2} + 1$ **(gambar kanan)**

## Aplikasi fisik dan geometri

**Luas daerah R :** $\iint_R dxdy = A$

**Volume di bawah permukaan z = f(x,y) (>0) dan di atas daerah R di bidang xy:** $V = \iint_R f(x,y)dxdy$



**Jika f adalah kepadatan (density) dari suatu distribusi massa maka massa total adalah:** $M = \iint_R f(x,y)\,dxdy$

**Contoh lainnya: Momen inersia, Titik pusat gravitasi**

## Perubahan variabel di integral lipat dua

**Ingat teknik pengintegralan substitusi pada integral tentu:**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a^*}^{b^*} f(x(u))\frac{dx}{du}du$$

**Apabila x=x(u,v), y=y(u,v) maka**

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

**dimana** $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ **Jacobi**

**Jika perubahan dari koordinat kartesius ke polar yaitu x= r cos θ, y = r sin θ maka**

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

**jadi** $\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$