<u>Fungsi Balikan Trigonometri</u>

Tujuan: (*Persiapan untuk Teknik Pengintegralan*)

1. **Memahami pendefinisian fungsi balikan trigonometri.**
2. **Memahami pencarian turunan dari fungsi balikan trigonometri.**

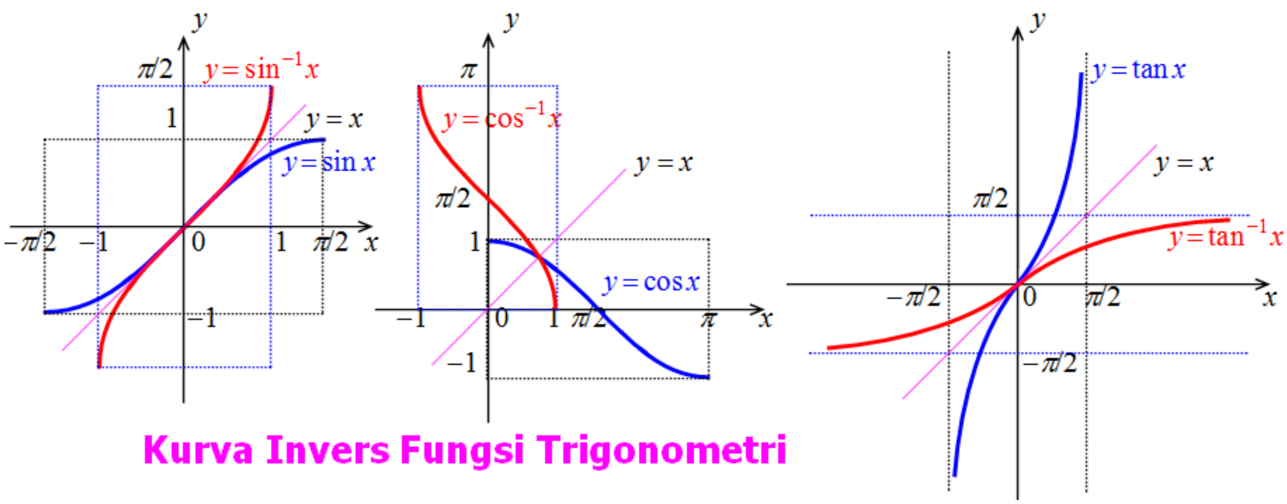
Fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik yang memiliki nilai yang berulang. Untuk mendefinisikan fungsi balikan digunakan pembatasan pada selang domainnya. Jadi perlu diperhatikan selain domainnya dalam menentukan nilai fungsinya.

Definisi:

$$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, \text{ **dan** } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, \text{ **dan** } 0 \leq x \leq \pi$$

$$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, \text{ **dan** } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



Kurva Invers Fungsi Trigonometri

Kaitan Invers Sinus dan Kosinus $\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{1}{2}\pi, -1 \leq x \leq 1.$

Bukti Dari $y = \cos^{-1}x$ untuk $0 \leq y \leq \pi$ atau $-\frac{1}{2}\pi \leq \frac{1}{2}\pi - y \leq \frac{1}{2}\pi$, maka diperoleh

$y = \cos^{-1}x$ berarti $x = \cos y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - y\right)$

$\frac{1}{2}\pi - y = \sin^{-1}x$ berarti $\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{1}{2}\pi.$

$$x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x,$$ **dan** $0 \le x \le \pi, x \ne \frac{\pi}{2}$

Ingat bahwa $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ **dan** $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ **dapat diperoleh**

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), |x| \ge 1$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), |x| \ge 1$$

Contoh: Hitunglah

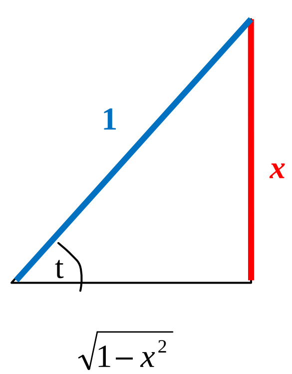
1. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **2.** $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ **3.** $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

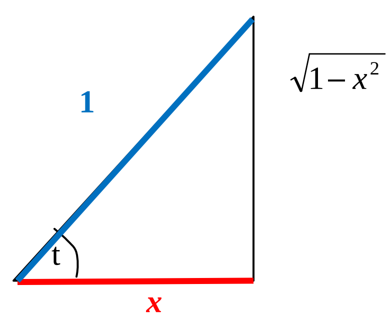
4. $\sec^{-1}(2)$

Bagaimana menentukan

$\sin\left(\cos^{-1} x\right)$, $\cos(\sin^{-1} x)$, $\sec(\tan^{-1} x)$, $\tan(\sec^{-1})$ **?**

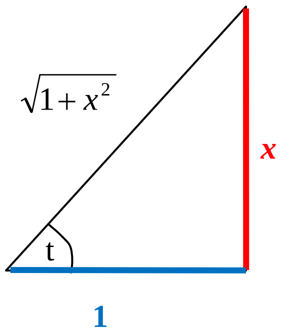
Gunakan segitiga berikut ini:

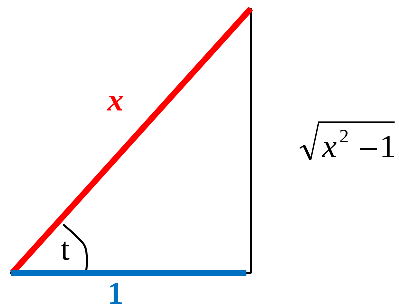




$$t = \sin^{-1} x \qquad\qquad t = \cos^{-1} x$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2} \qquad\qquad \sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$





$$t = \tan^{-1} x \qquad\qquad t = \sec^{-1} x$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\cos t} = \sqrt{1+x^2} \qquad \tan(\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$$

Turunan untuk fungsi balikan trigonometri

1. $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y, -1 \le x \le 1, -\frac{1}{2}\pi \le y \le \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\sin y)}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

2. Dari relasi $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{1}{2}\pi, -1 \le x \le 1$ di-peroleh

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x\right) = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

3. Dengan menggunakan turunan fungsi invers pada relasi $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, x \in \Re, -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi.$ diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\tan y)}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \Re.$$

1. $D_x \sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$

2. $D_x \cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$

3. $D_x \tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$

4. $D_x \sec^{-1} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, -1 < x < 1$

Petunjuk dalam mengingat:

Rumus 1 dan 2 berkaitan dengan kesamaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **dengan bentuk** $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ **atau** $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ **.**

Rumus 3 dan 4 berkaitan dengan kesamaan $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ **atau** $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

Rumus integral yang terkait dengan invers trigonometri adalah

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C, a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, a > 0.$$

Contoh Hitunglah $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ dengan menggunakan manipulasi integral.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(4-2x-4)dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\int \frac{d(4x-x^2)}{2\sqrt{4x-x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x-2}{2} + C.$$