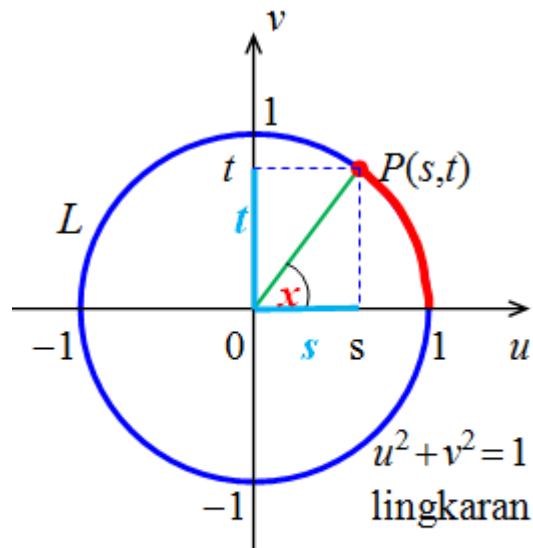


Fungsi Hiperbola dan Balikannya

Ingat:

Fungsi **trigonometri** dikaitkan dengan **lingkaran satuan** $L: u^2 + v^2 = 1$.



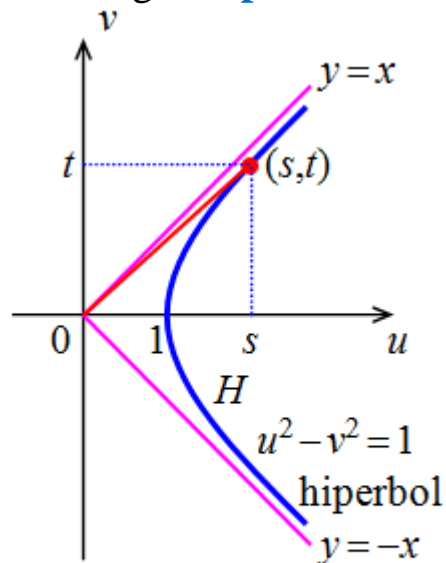
$$s = \cos x \quad \text{dan} \quad t = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

✚ Fungsi trigonometri lainnya dirancang sebagai

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Fungsi **hiperbolik** dikaitkan dengan **hiperbol satuan** $H: u^2 - v^2 = 1$.



$$s = \cosh x \quad \text{dan} \quad t = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

✚ Dari rancangan ini langsung diperoleh $\cosh x \geq 1$ dan $-\infty < \sinh x < \infty$.

✚ Fungsi hiperbolik lainnya dirancang seperti fungsi trigonometri, yaitu

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \text{ dan } \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$

Fungsi hiperbolik $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$, dan $y = \operatorname{sech} x$ terdefinisi untuk $x \in \mathfrak{R}$ sedangkan yang lainnya terdefinisi untuk $x \in \mathfrak{R}, x \neq 0$.

Suatu pilihan untuk fungsi $\cosh x$ dan $\sinh x$ adalah kombinasi dari e^x dan e^{-x} . Kita definisikan

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

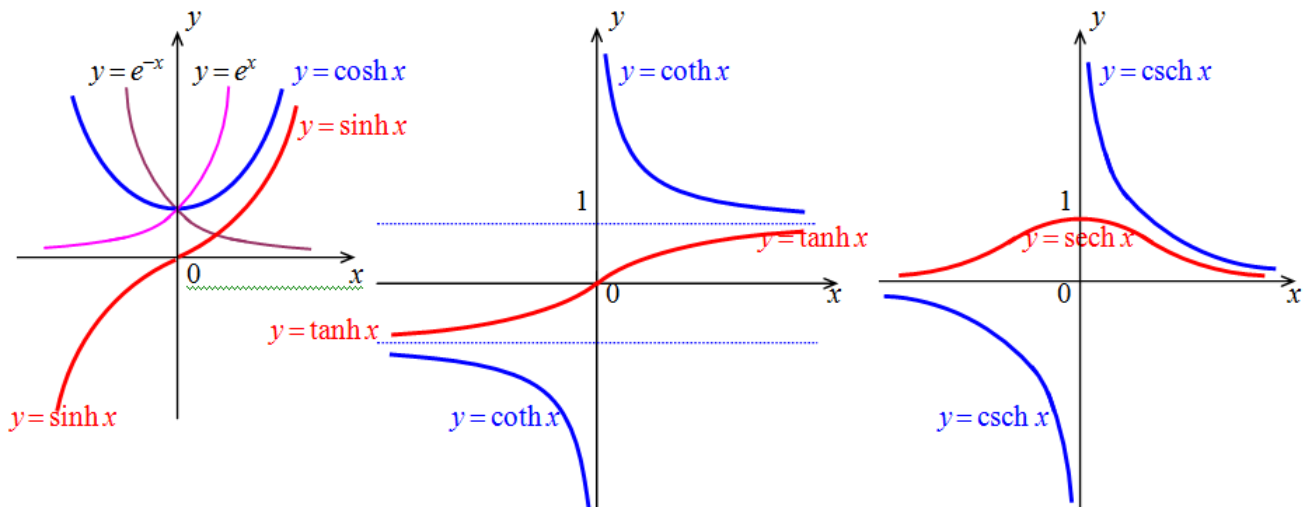
Bentuk eksponen untuk tangen, cotangen, sekan, dan kosekan hiperbolik adalah

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Kurva Fungsi Hiperbolik



Turunan fungsi hiperbolik:

$$D_x \sinh x = \cosh x$$

$$D_x \cosh x = \sinh x$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$D_x \coth x = -\operatorname{csc} h^2 x$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$D_x \operatorname{csc} h x = -\operatorname{csc} h x \coth x$$

Invers fungsi hiperbolik:

Invers fungsi hiperbolik dikonstruksi dengan cara yang sama seperti invers fungsi trigonometri.

$$x = \sinh^{-1} y \Leftrightarrow y = \sinh x$$

$$x = \cosh^{-1} y \Leftrightarrow y = \cosh x, x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \Leftrightarrow y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \Leftrightarrow y = \operatorname{sech} x, x \geq 0$$

Invers Sinus Hiperbolik

Invers dari $y = \sinh x$, $x \in \mathfrak{R}$, ditulis $y = \sinh^{-1} x$ adalah fungsi yang memenuhi $y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$, $x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}$. Dari $x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ diperoleh $2x = e^y - e^{-y}$, atau $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$. Selesaikan persamaan kuadrat ini, diperoleh $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Karena e^y selalu bernilai positif, maka $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, sehingga $y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathfrak{R}$.

Invers Kosinus Hiperbolik

Invers dari $y = \cosh x, x > 0$, ditulis $y = \cosh^{-1} x$ adalah fungsi yang memenuhi $y = \cosh^{-1} x \hat{U} x = \cosh y, x \geq 1, y \geq 0$. Bentuk logaritma naturalnya adalah $y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$.

Invers Tangen Hiperbolik

Invers dari $y = \tanh x$, $x \in \mathfrak{R}$, ditulis $y = \tanh^{-1} x$ adalah fungsi yang memenuhi $y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y$, $-1 < x < 1$, $y \in \mathfrak{R}$. Bentuk logaritma naturalnya adalah $y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $-1 < x < 1$.

Turunan dari balikan fungsi hiperbolik:

Turunan invers fungsi hiperbolik diperoleh dari bentuk logaritmanya atau dengan rumus turunan invers seperti turunan invers fungsi trigonometri.

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$$

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1$$

Perhatikan kedua turunan di bawah ini:

$D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$	$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$D_x \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$	$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$
$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$	$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1$
$D_x \sec^{-1} x = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2 - 1}}, -1 < x < 1$	$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$