Teknik Pengintegralan

Kesamaan Trigonometri:

Phytagoras:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Dari sini kita dapat melihat semacam relasi erat antara sinus - cosinus, secant - tangent, cosecant - cotangent.

Setengah sudut:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Relasi ini akan sangat berguna dalam menghitung integral fungsi trigonometri berpangkat.

Hasilkali:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$$

Sekarang kita akan menyimak bentuk-bentuk integral baku.

Fungsi Pangkat:

1. $\int k \ du = ku + C$

2. $\int u^r \ du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C \\ \ln|u| + C \end{cases}$

Bentuk ini paling sederhana sehingga kita tidak akan sulit untuk mengingatnya.

Eskponensial:

3. $\int \mathrm{e}^{\mathrm{u}} \ du = \mathrm{e}^{\mathrm{u}} + C$

4. $\int a^{\mathrm{u}} \ du = \dfrac{a^{\mathrm{u}}}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

Bentuk ini berasal dari fungsi yang istimewa transenden ekponensial natural dan umum.

Fungsi Trigonometri:

5. $\int \sin u \ du = \cos u + C$

6. $\int \cos u \ du = -\sin u + C$

7. $\int \sec^2 u \ du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u \ du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u \ du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u \ du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u \ du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u \; du = \ln\left|\sin u\right| + C$

Pada bagian ini kita harus mengingat bahwa ada relasi yang erat antara sinus dan cosinus, secant dan tangent, cosecant dan cotangent. Dengan mengingat relasi ini maka kita dapat dengan mudah mengingat bentuk integral ini.

Fungsi Aljabar:

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \; du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

14. $\int \frac{1}{a^2 + u^2} \; du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

15. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} \; du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

Bentuk-bentuk ini menggabungkan antara fungsi akar dengan fungsi trigonometri, yaitu inversnya. Yang pertama kali perlu diingat di sini adalah mencari turunan dari fungsi invers dari sinus, cosinus dan tangent.

Fungsi Hiperbolik:

16. $\int \sinh u \; du = \cosh u + C$

17. $\int \cosh u \; du = \sinh u + C$

Bentuk ini cukup mudah diingat karena serupa dengan relasi sinus dan cosinus.

Teknik Substitusi

Misal g suatu fungsi yang terdiferensialkan dan F adalah suatu fungsi antiturunan dari f.
Maka jika u = g(x),

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Beberapa hal yang perlu diperhatikan:
- kita harus cukup jeli melihat bentuk dari fungsi yang akan diintegralkan atau integrannya. Di fungsi ini harus memuat g'(x) bila kita ambil u = g(x).
Contoh: Tentukan $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$**.**
- kita dapat mengubah integran menjadi bentuk yang lebih mudah untuk disubstitusikan atau diintegrasikan langsung.
Contoh 1: Tentukan $\int \frac{2x^2+x}{x+1}dx$**,** $\int \frac{7}{x^2-6x+25}dx$

Teknik Integral Parsial

Metode ini didasarkan pada pengintegralam rumus turunan hasilkali dua fungsi.
Andaikan u = u(x) dan v = v(x) maka

$$D_x(u.v) = u.D_x(v) + D_x(u).v$$

dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh
$u.v = \int u.v'dx + \int u'vdx$ **atau** $\int u.v'dx = u.v - \int vu'dx$**.**
Untuk menyelesaikan proses dapat dilakukan teknik ini berulang.
Contoh: Tentukan $\int x\sin 3x dx$

Rumus reduksi: $\int f^n(x)dx = g(x) + \int f^k(x)dx$**.**
Contoh: Turunkan suatu rumus reduksi untuk $\int \sin^n x dx$**.**