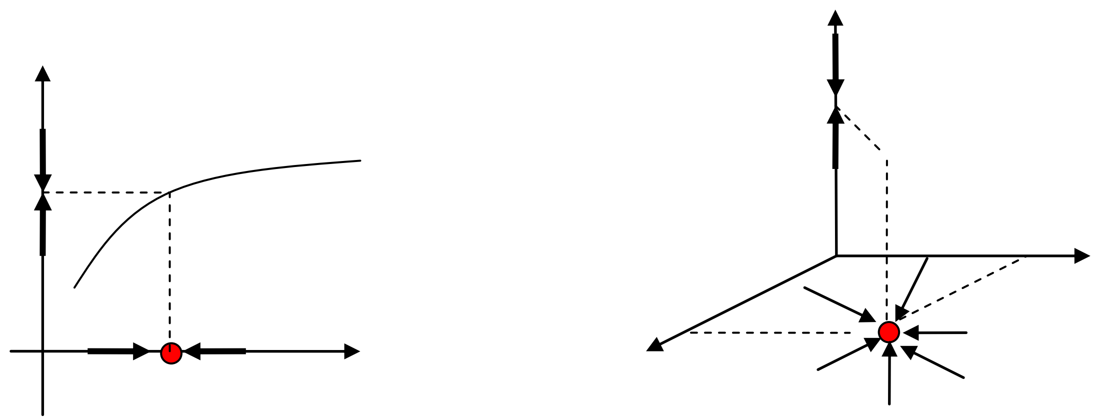
Limit

Pada ruang dimensi satu: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x,y) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x,y)$

Pada ruang dimensi dua: nilai limit sama untuk semua arah. (Bagaimana mencari untuk semua arah??)



Definisi:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ **berarti untuk setiap ε > 0 terdapat bilangan δ > 0 sedemikian sehingga** $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ **dengan syarat** $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$.

Catatan:

1. **Nilai untuk satu arah saja tidak berguna, misal hanya arah y = x, karena bisa berbeda untuk arah yang lain.**

   Contoh: Hitunglah $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. **Akan dilihat pada arah sumbu x saja dan pada arah sumbu y saja.**

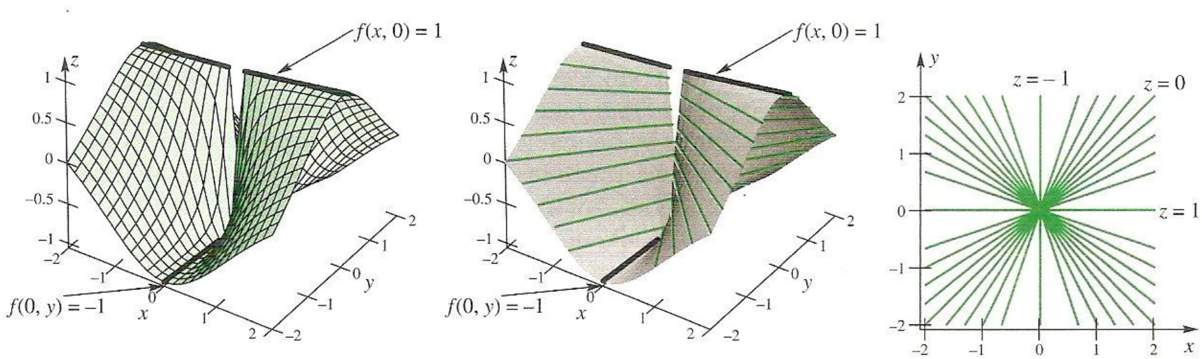
   Nilai limit saat (x,y) menuju (0,0) sepanjang sumbu x adalah:

   $$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1$$

   Nilai limit saat (x,y) menuju (0,0) sepanjang sumbu y adalah:

   $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1$$

   Jadi nilai limit untuk arah sepanjang sumbu x tidak sama dengan arah sepanjang sumbu y.



2. **Nilai fungsi di titik (a,b) tidak perlu ada.**

Teorema: (khusus untuk fungsi polinom)

1. **Jika f(x,y) fungsi polinom maka** $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
2. **Jika** $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}}$ **dan** $\boldsymbol{p(x,y)}$ **dan** $\boldsymbol{q(x,y)}$ **adalah fungsi-fungsi polinom dengan** $\boldsymbol{q(a,b) \neq 0}$**, maka**

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{p(a,b)}{q(a,b)}$$

3. **Jika** $\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) \neq 0}$ **dan** $\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(a,b)} q(x,y) = 0}$ **maka** $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ **tidak ada.**

Contoh:
Cari limitnya atau tunjukkan limitnya tidak ada.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y^3}{(x+y+1)^2}$ **(dimasukkan langsung nilainya, bila ada maka limitnya ada)**
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy-y^3}{(x+y-1)^2}$ **(masalah pembagian dengan nol)**
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ **(fungsi dapat disederhanakan terlebih dahulu dengan eliminasi)**
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **(fungsi disederhanakan dengan mengubah ke koordinat polar)**
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2}$

Kekontinuan

Kontinu di suatu titik (a,b) : Nilai f(x,y) di (a,b) ada, limit di (a,b) ada, dan keduanya bernilai sama.

Kontinu pada himpunan: kotinu pada setiap titik pada himpunan.

Contoh: Tentukan himpunan di mana fungsi $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy^4}{y-x^2}$ **kontinu.**

Keterdiferensialan

Keterdiferensialan f di x berarti eksistensi turunan f '(x).

Pada fungsi satu peubah:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Analoginya: jika $\overline{p}=(x,y)$ **dan** $\overline{p}_0=(x_0,y_0)$

$$f'(\overline{p}_0)=\lim_{\overline{p}\to\overline{p}_0}\frac{f(\overline{p})-f(\overline{p}_0)}{\overline{p}-\overline{p}_0}=\lim_{\overline{h}\to 0}\frac{f(\overline{p}_0+\overline{h})-f(\overline{p}_0)}{\overline{h}}$$

Tetapi apa arti *pembagian oleh suatu vektor*?

Definisi:

Fungsi f dapat dideferensialkan di $\overline{p}$ **jika terdapat suatu vektor** $\overline{m}$ **sedemikian sehingga**

$$f(\overline{p}+\overline{h})=f(\overline{p})+\overline{m}\bullet\overline{h}+\left|\overline{h}\right|\varepsilon(\overline{h})$$

dengan $\varepsilon(\overline{h})\to 0$ **pada** $\overline{h}\to 0$.

Jika vektor $\overline{m}$ **ada maka tunggal dan** $\overline{m}=\Delta f(\overline{p})$ (=delta f) **gradien f di** $\overline{p}$.

Contoh:

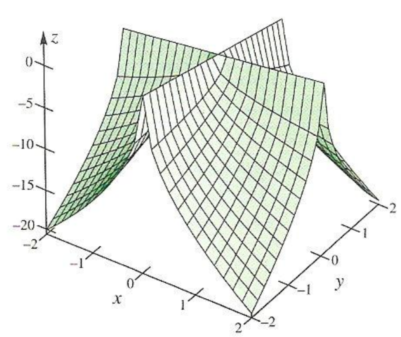
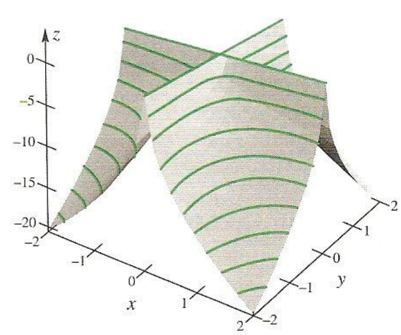


Figure 1



$z=-10\sqrt{|xy|}$

Teorema A:

Jika f fungsi dua-peubah yang dapat dideferensialkan di $\overline{p}$ maka turunan parsial pertama dari f di $\overline{p}$ ada dan

$$\Delta f(\overline{p}) = \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{p})\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{p})\overline{j}$$

Teorema B:

Jika f punya turunan parsial pertama di suatu lingkungan dari $\overline{p}$ dan turunan parsialnya kontinu di $\overline{p}$ maka f dapat dideferensialkan di $\overline{p}$.

Teorema C:

$$(i)\Delta\left[f(\overline{p}) + g(\overline{p})\right] = \Delta f(\overline{p}) + \Delta g(\overline{p})$$

$$(ii)\Delta\left[\alpha f(\overline{p})\right] = \alpha \Delta f(\overline{p})$$

$$(iii)\Delta\left[f(\overline{p})g(\overline{p})\right] = \Delta\left[f(\overline{p})\right]g(\overline{p}) + f(\overline{p})\Delta\left[g(\overline{p})\right]$$

Teorema D:

Jika f dapat dideferensialkan di $\overline{p}$ maka f kontinu di $\overline{p}$.

Contoh: $f(x, y) = x^2 y - xy^2$

a. **Tunjukkan f dapat dideferensialkan dan cari gradiennya di titik (-2,3).**
b. **Cari persamaan garis singgung di (-2,3).**