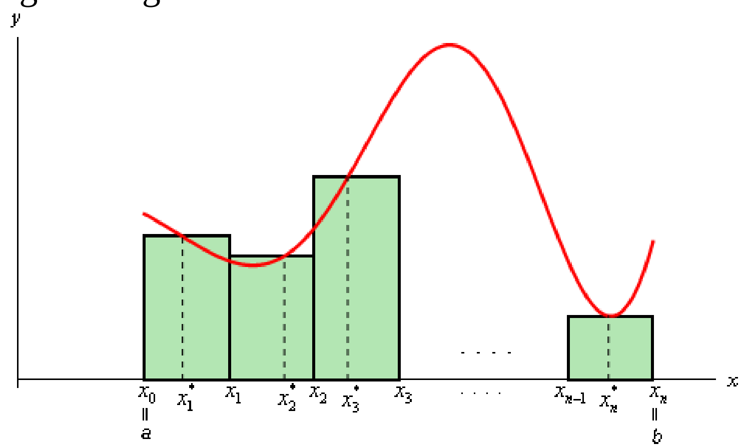
Integral Lipat

Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

Integral tentu dapat dipergunakan untuk fungsi dengan dua peubah atau lebih. Pada bagian ini, kita akan mendiskusikan integral lipat dua dari fungsi dua peubah.

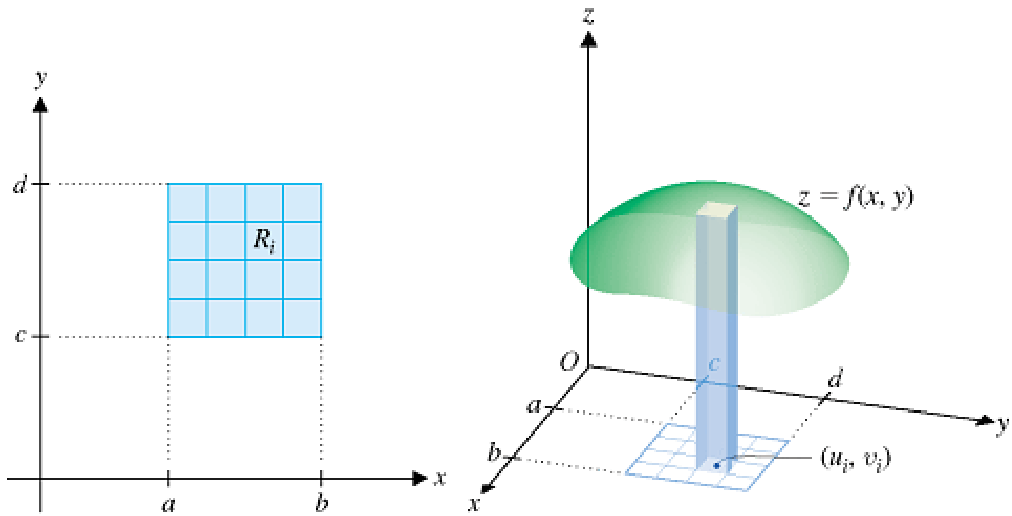
Ingat: Integral Riemann



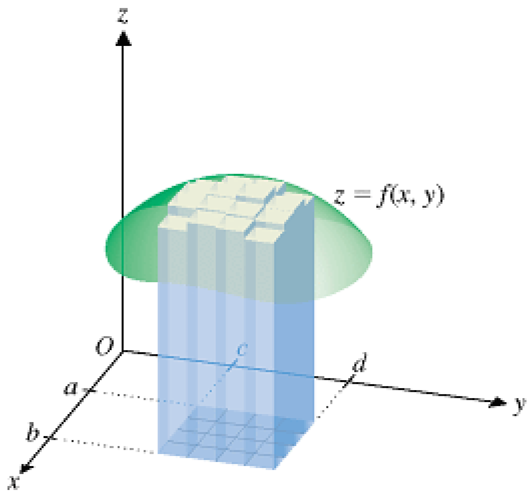
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$$

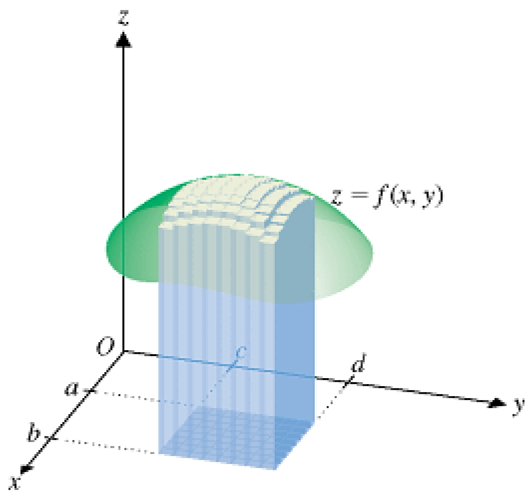
untuk mencari luas daerah di bawah kurva *f(x)*. Di sini *f* terdefinisi pada selang [a,b].

Pada fungsi dua peubah, misal daerah definisi adalah R = $\{(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Seperti pada Riemann, buat partisi masing-masing interval, lalu pilih salah satu partisi R_i dan salah satu titik di dalamnya adalah (u_i, v_i), lalu buat balok persegipanjang dengan luas alas R_i dan tinggi $f(u_i, v_i)$.

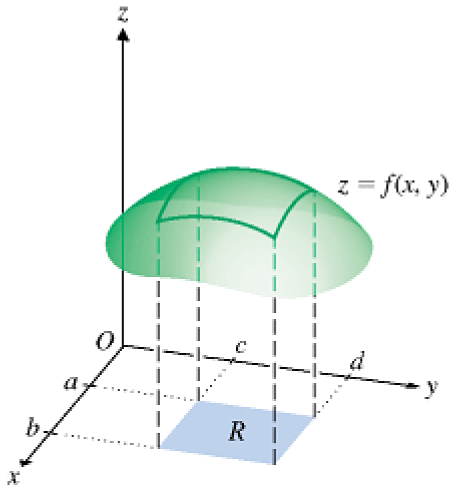


Lakukan untuk semua partisi R. Lalu perkecil luas R dan lanjutkan.





Definisi Integral Lipat Dua



Jika $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$ ada maka f dapat diintegralkan di R.

$\iint_R f(x,y)\,dA$ disebut integral lipat-dua f atas R, dan $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$

Teorema Keintegralan

Jika f terbatas pada suatu persegipanjang tertutup R dan jika fungsi ini kontinu di R kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, maka f dapat diintegralkan pada R.

Integral lipat dua adalah linear, yaitu bersifat:

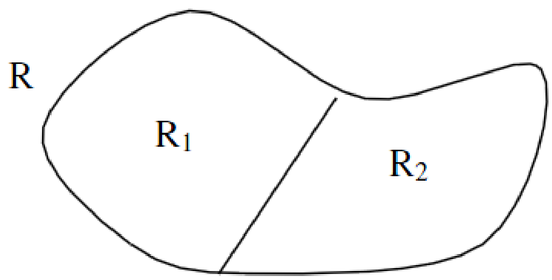
$$\iint_R c\ f(x,y)\, dA = c\iint_R f(x,y)\, dA \text{ , c konstanta}$$

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$$

$$\iint_R [f(x,y)-g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA - \iint_R g(x,y)\, dA$$

Selain itu, integral lipat dua adalah aditif yang daerahnya bisa saling melengkapi.

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$



Perhitungan pada Integral Lipat-Dua

Jika f(x,y)=1 maka integral lipat-duanya merupakan luas dari R, maka

$$\iint_R k dA = k\iint_R 1 dA = kA(R)$$

Contoh:

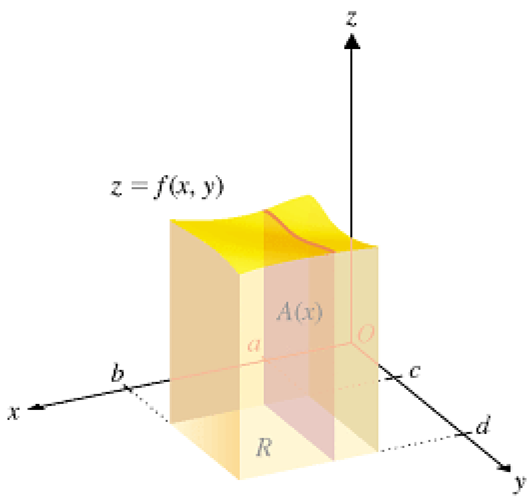
Misal $f(x,y) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 3, & 3 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$. Hitunglah $\iint f(x,y)\ dA$.

Integral Berulang

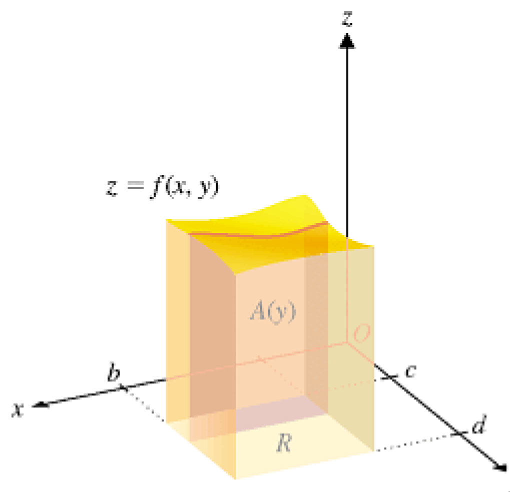
Ada cara lain, yang lebih praktis, untuk menghitung integral lipat dua. Partisi yang dibuat bukan balok tapi irisan tipis. Misal di titik x_i, cari luas irisan tipis $A(x_i)$ yang diperoleh dari integral fungsi satu peubah, $A(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy$, kemudian cari volume irisan tipis tersebut dengan mengalikan dengan tebalnya Δx. Cari volume irisan tipis untuk semua i. Dengan demikian

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx .$$

Irisan untuk x_i constant



Irisan untuk y_i constant



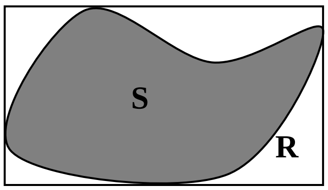
Sama halnya bila irisan tipisnya pada suatu y_i adalah $A(y_i) = \int_a^b f(x, y_i)dx$, dengan prosedur yang serupa diperoleh

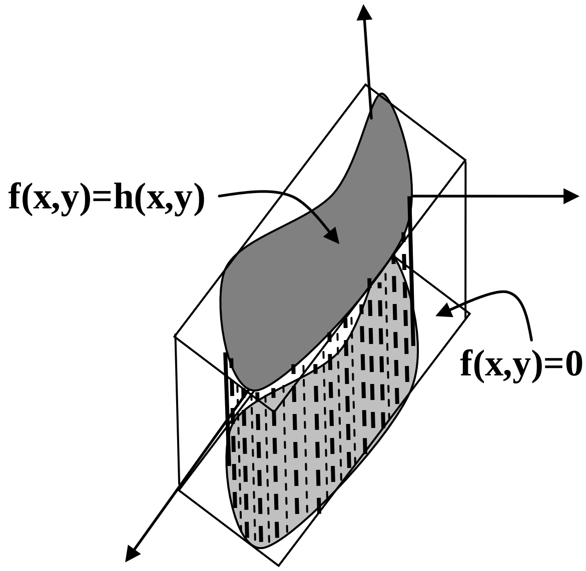
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

Contoh: Hitunglah $\int_0^2 \int_0^3 (9-y)dxdy$.

Integral Lipat-Dua atas Daerah Bukan Persegipanjang

Misalkan himpunan S tertutup dan terbatas pada bidang. Misal $h(x,y)$ terdefinisi di S. Himpunan S terkandung dalam persegipanjang R yang sisi-sisinya sejajar dengan sumbu x dan y. Definisikan $f(x,y) = \begin{cases} h(x,y), & jika\ (x,y)\ di\ S \\ 0, & jika\ (x,y)\ di\ R - S \end{cases}$





Fungsi f dapat diintegrasikan jika ia dapat diintegrasikan pada R dan

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA.$$

Daerah Integrasi:

Himpunan y-sederhana bila

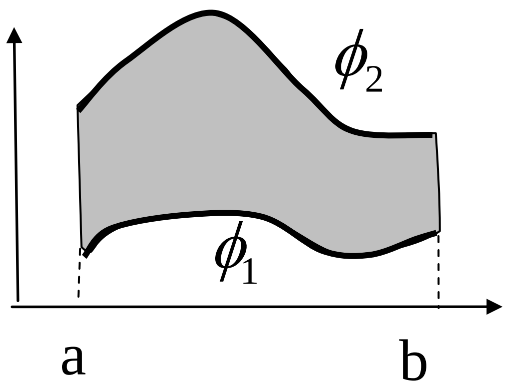
$$S = \{\ (x,y):\ \phi_1 \le y \le \phi_2\ ,\ a \le x \le b\ \}$$

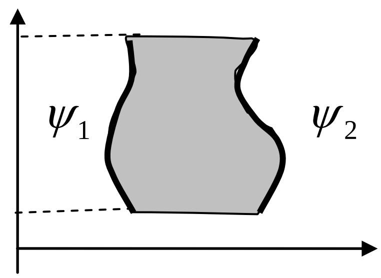
Hasil integral: $\iint_S f(x,y)dA = \int_b^a \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y)dy \right] dx$

Himpunan x-sederhana bila

$$S = \{\ (x,y):\ \psi_1 \le x \le \psi_2\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

Hasil integral: $\iint_S f(x,y)dA = \int_d^c \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)dx \right] dy$





Contoh:

Hitung integral lipat berikut:

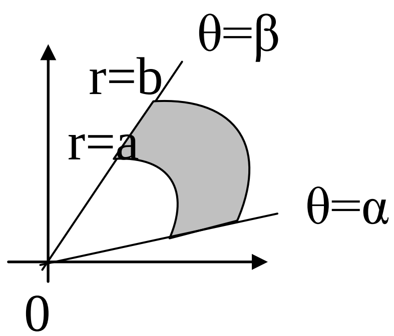
1. $\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 y\,dy\,dx$

2. $\iint_S xy\,dA$, S adalah segitiga yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan y=1.

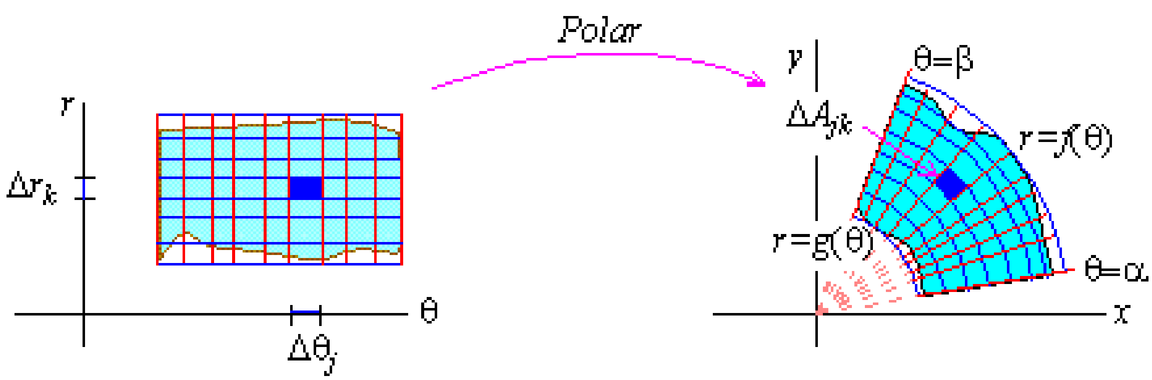
Integral Lipat-Dua dalam Koordinat Kutub

Volume benda padat di bawah permukaan f di atas daerah R adalah

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA.$$



Dalam koordinat kutub, R berbentuk
$R=\{(r,\theta):\ a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$
Dimana $a \ge 0$, $\beta - \alpha \le 2\pi$.



R dibagi menjadi partisi-partisi dalam koordinat kutub/polar (menjadi polar grid) $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Untuk mencari luas sektor lingkaran adalah $\dfrac{A}{\pi r^2} = \dfrac{\theta}{2\pi}$, maka $A = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$

Jadi luas partisi R_k adalah $A(R_k) = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k$, dimana $\bar{r}_k$ adalah jari-jari rata-rata R_k, sehingga volumenya adalah

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\bar{r}_k, \theta_k)\bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k$$

Bila pembagian partisi mendekati nol maka

$$V = \iint_R F(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

maka $V = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

Contoh: tentukan volume dari benda padat di atas persegipanjang kutub $R=\{(r,\theta):1\le r\le 3, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$ dan di bawah permukaan $z=e^{x^2+y^2}$.

Daerah Integrasi:
Himpunan r-sederhana bila

$$S=\{(r,\theta):\phi_1(\theta)\le r\le\phi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$$

Himpunan θ-sederhana bila

$$S=\{(r,\theta):a\le r\le b,\psi_1(r)\le\theta\le\psi_2(r)\}$$

Contoh:

1. Hitunglah $\iint_R y\,dA$ dimana S adalah daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardiodid $r = 2\ (1+\cos\theta)$.

2. Tentukan volume benda di bawah permukaan $z=x^2+y^2$, di atas bidang xy dan di dalam silinder $x^2+y^2=2y$.

Penerapan Integral Lipat-Dua

Menghitung massa, pusat massa, momen inersia.

Lamina (plat tipis) terbuat dari bahan yang tidak homogen dengan kerapatannya berubah δ(x,y).

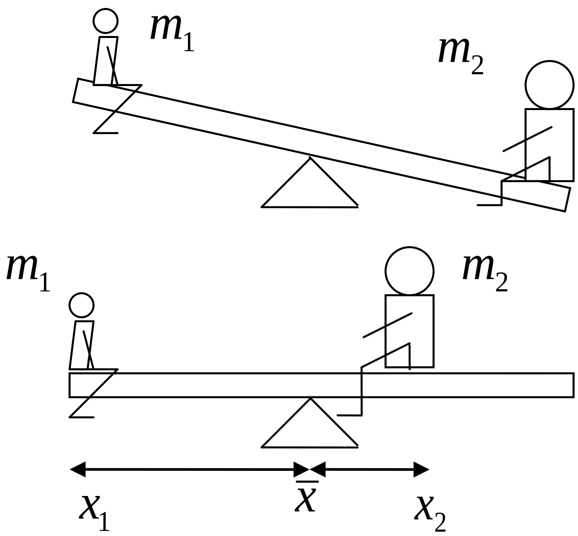
Lamina dipartisi menjadi persegipanjang kecil $R_1, R_2, R_3,\dots, R_k,\dots, R_n$. Ambil sebuah titik $(\bar{x}_k,\bar{y}_k)$ pada R_k . Massa dari R_k secara hampiran adalah $\delta(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\ A(R_k)$ dan massa total lamina secara hampiran

$$m\approx\sum_{k=1}^{n}\delta(\bar{x}_k,\bar{y}_k)A(R_k)$$

Massa sebenarnya

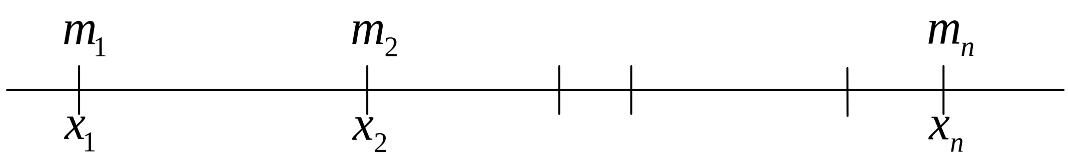
$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta(\bar{x}_k,\bar{y}_k)A(R_k)=\iint_S\delta(x,y)dA$$

Menghitung Pusat Massa:



Pada gambar kedua: $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$ keadaan setimbang, dimana x_1 dan x_2 adalah jarak orang terhadap pusat massa $\bar{x}$

Untuk mencari pusat massa $\bar{x}$:



$$(x_1 - \bar{x})m_1 + (x_2 - \bar{x})m_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})m_n = 0$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \ldots + \bar{x} m_n$$

Jadi pusat massa:

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Lakukan hal yang sama untuk arah y sehingga diperoleh

$$\bar{y} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Pada bidang xy, jika kerapatan massa suatu fungsi kontinu m = δ(x,y):

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_S x\delta(x,y)dA}{\iint_S \delta(x,y)dA} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_S y\delta(x,y)dA}{\iint_S \delta(x,y)dA}$$

Momen Inersia:
Suatu partikel bermassa m dan kecepatan v bergerak pada suatu garis lurus. Energi kinetiknya adalah:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2$$

Jika partikel bergerak bukan pada garis lurus tapi berputar terhadap suatu sumbu membentuk lingkaran dengan jari-jari r pada suatu kecepatan sudut ω radian per detik, maka kecepatan linearnya adalah v = r ω.
Energi kinetiknya menjadi

$$KE = \frac{1}{2}(r^2 m)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Jadi momen Inersia I memainkan peran sebagai massa pada benda bergerak lurus/linear.

Pada suatu sistem

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

Apabila lamina punya kerapatan kontinu m = δ(x,y) yang mencakup suatu daerah S, momen inersia terhadap sumbu x, y dan z adalah

$$I_x = \iint_S y^2\delta(x,y)dA,$$

$$I_y = \iint_S x^2\delta(x,y)dA$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta(x,y)dA = I_x + I_y$$

Contoh:
Sebuah lamina dengan kepadatan $\delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = xy$ yang dibatasi oleh sumbu-x, garis x = 8, dan kurva $y = x^{2/3}$.
Tentukan massa total, pusat lamina dan momen inersia terhadap sumbu x, y dan z.