1. Pendahuluan

Dalam pasar keuangan, beberapa instrument financial yang perlu dikenali:

a. Stock (Equitis, Securities, Shares)
b. Bonds : Corporate, Municipal, Government (Long Term Borrowing)
c. Corporate paper, Certificates of Deposit, Treasury Bills (Short Term Borrowing)
d. Commodity futures, currency futures, options (derivative securities), (Contingent Claims/Contract: Kontrak/Pengakuan bersyarat)

Setiap instrument diperdagangkan dalam pasar (Market) yang terdiri dari Buyer (pembeli) dan Seller (penjual). Setelah terjadi transaksi , surat kontrak dapat digunakan oleh pemiliknya (holder) dan hak yang diklaim harus dilaksanakan oleh perusahaan yang mengeluarkan surat tersebut (writer). Pasar dunia (Global Market) yang utama ada di Tokyo, London, New York, Hong Kong, Zurich, Frankfurt, Paris dan Toronto.

Kegunaan dari instrument finansial adalah:

a. Primer : investasi, mengumpulkan modal
b. Sekunder: Spekulation, Arbitrage, Hedging, Debt Swaps

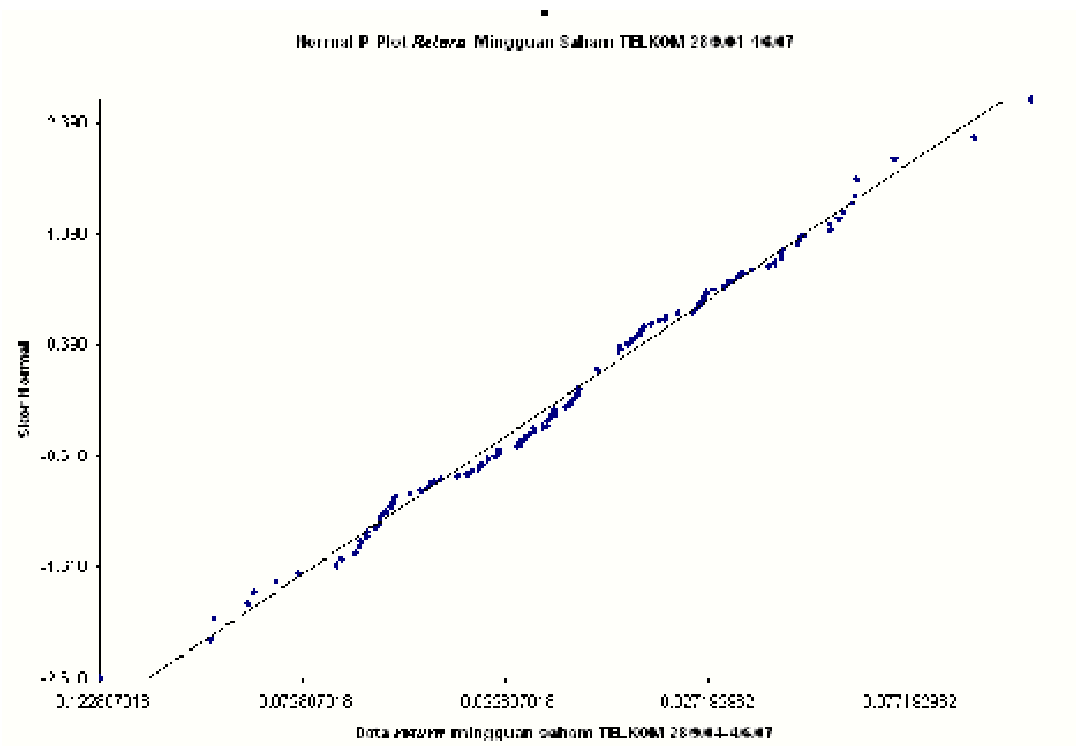
Model Matematika dalam finance adalah :

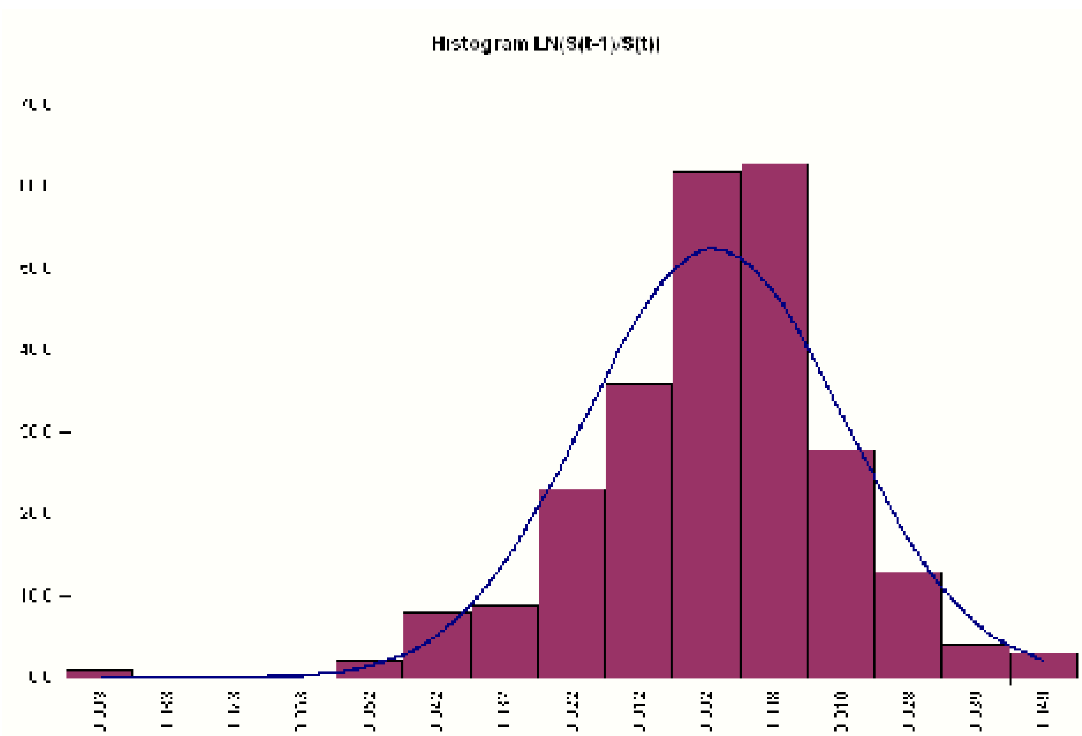
a. Static Portfolio Analysis: Markowitz (1959)
b. Dynamic Portfolio Analysis
c. Contingent Claims Analysis: Black and Scholes (1973), Merton (1973)

Pada kuliah ini, model yang akan dibahas adalah model Contingent Claims Analysis dari Black Scholes. Sebelumnya akan dibahas pemodelan pergerakan harga saham yang diasumsikan mengikuti suatu distribusi statistik tertentu. Asumsi ini berdasarkan pengamatan dari data lapangan.

Dengan menggunakan distribusi statistik,return harian dipandang sebagai variabel acak:

$$X \coloneqq ln\frac{S_{t-1}}{S_t} \approx \frac{S_{t-1}-S_t}{S_t}$$


Skor Normal
0.027192932
0.077192932


Histogram LN(S(t-1)/S(t))

Histogram menunjukkan fungsi kepadatan peluang $f_x(x)$, terhadap suatu variable acak X. Fungsi tersebut dapat berbentuk diskrit atau kontinu, bersesuaian dengan variabel randomnya.

Contoh beberapa distribusi:

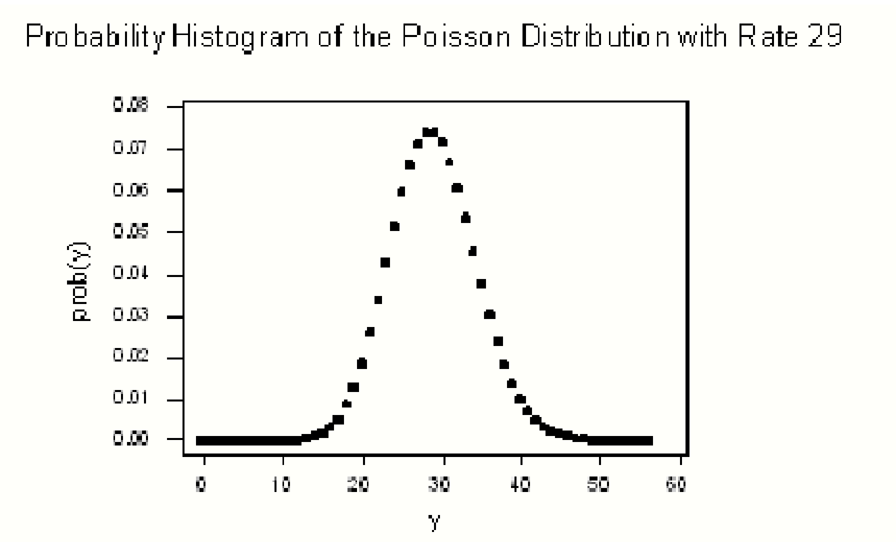
1. Binomial, diskrit pada {0,1,…,n},

$$0 < p = 1 - q < 1.$$

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{n} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} p^k q^{n-k} & \text{jika } x = k, k = 0,1, \dots, n \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

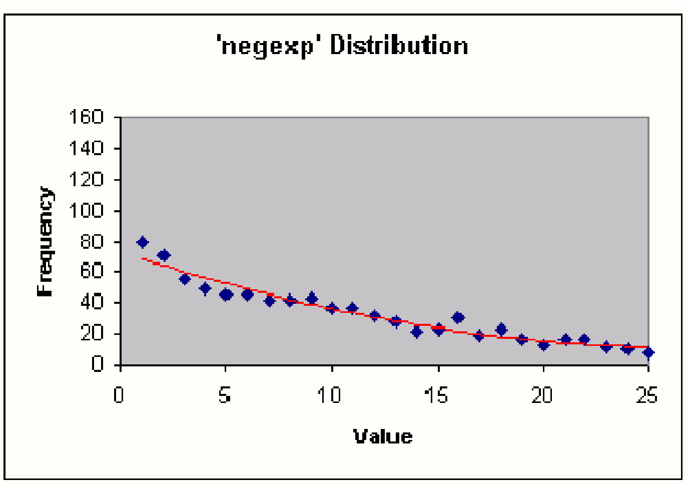
2. Poisson, diskrit pada {0,1,…,n}, λ>0

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & jika\ x = k, k = 0,1, \dots, n \\ 0 & lainnya \end{cases}$$



3. Exponensial Negatif, kontinu absolut pada [β ,∞), dengan α>0.

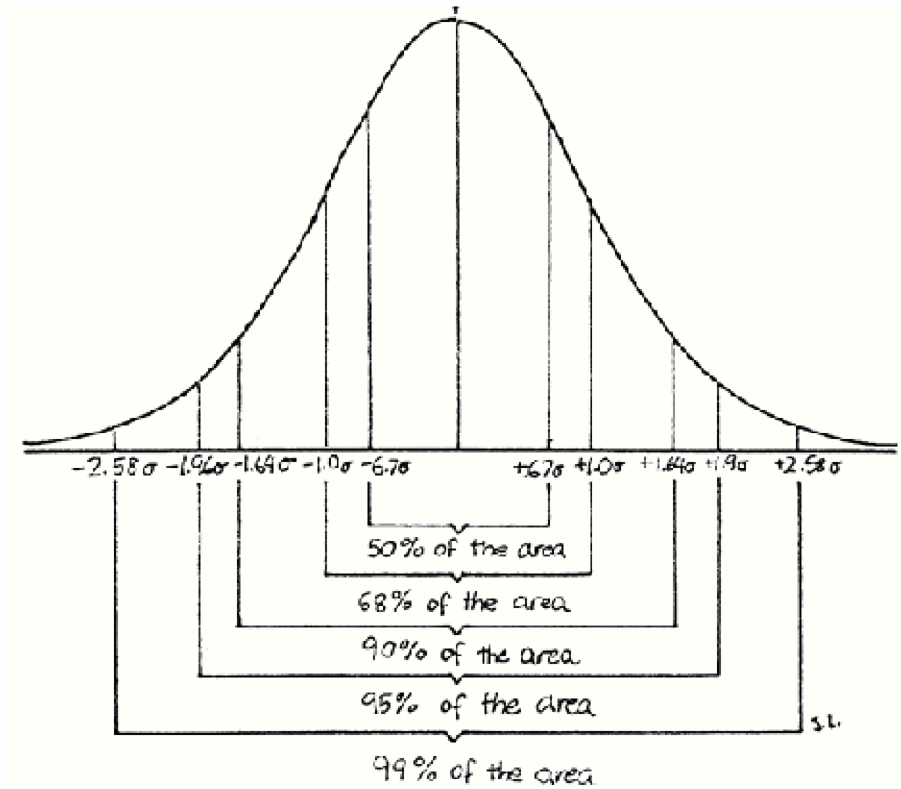
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-\beta)} & jika\ \beta \leq x \leq \infty \\ 0 & lainnya \end{cases}$$



4. Gauss at

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varphi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Simbol *N(μ,σ²)* digunakan untuk menunjukkan suatu distribusi normal dengan parameter μ dan σ.



Fungsi distribusi dari suatu variabel acak X diberikan

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_x^{\infty} f_X\,(\xi) d\xi,$$

jika *X* kontinu. Sedangkan untuk X diskrit, fungsi distribusinya adalah:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X\,(x_i)$$

Pada bentuk kontinu, fungsi distribusi diberikan oleh daerah di atas fungsi kepadatan peluang sampai dengan x.

Mean atau Ekspektasi dari suatu variabel acak didefinisikan sebagai berikut

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(\,x) dx$$

jika X kontinu dan

$$E(X) = \sum_{x_i \leq x} x_i f_X\,(x_i)$$

jika X diskrit.

Contoh:

1. Binomial : $E(X) = np$.

2. Poisson : $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda$.
3. Exponensial negatif: $E(X) = \beta + \alpha^{-1}$
4. Normal : $E(X) = \mu$.

Pengukuran dari kecenderungan central (pusat) dari variable acaknya oleh mean, median dan modus. Pada distribusi normal, mean, median dan modus sama. Kecuali pada skewed.

Untuk mengukur sebaran, didefinisikan variansi dari suatu variabel acak.

$$varX = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Standard deviasi, atau dalam istilah finance disebut volatility, diberikan oleh

$$\sigma_X = \sqrt{varX}$$

Karena ekspektasi adalah linier, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha X + \beta Y$, maka

$$var(\alpha X) = \alpha^2 varX$$

$$\sigma_\alpha X = \alpha \sigma_X$$

Risiko dari pasar saham dapat diperkirakan dengan menggunakan distribusi. Misal suatu saham bernilai 50 dollar. Jika historical volatility dari returnnya adalah 1.181 % berlaku untuk 24 jam ke depan, maka dengan kepercayaan 90% return ini tidak akan melebihi ±1.937% atau antara 49.98063 dollar dan 50.01937 dollar.

2. Distribusi Normal

Variabel random Y disebut suatu variabel random lognormal dengan parameter μ dan σ jika $log(Y)$ adalah variabel random berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. Jadi Y adalah lognormal bila dapat ditulis sebagai

$$Y = e^X$$

di mana X adalah variabel random Normal.

$$E[Y] = e^{(\mu + \sigma^2)/2}$$
$$Var(Y) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Contoh:

Misalkan $S(n)$ adalah harga suatu security pada akhir dari n minggu tambahan, $n \geq 1$. Asumsikan bahwa $\frac{S(n)}{S(n-1)}$untuk $n \geq 1$ saling bebas dan terdistribusi lognormal independent,identically distributed). Misalkan parameter lognormalnya adalah $\mu = 0.0165$ dan $\sigma = 0.0730$. Bagaimana peluang

1. harga securitynya naik minggu depan?
2. harga security naik berturut-turut dalam tiga minggu?
3. harga pada akhir minggu kedua lebih tinggi dari sekarang?

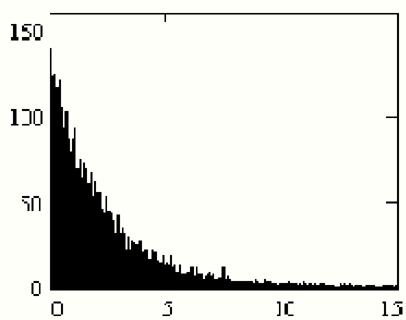
3. Teorema Limit Pusat

Theorem 2 Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ adalah variabel random yang independent, terdistribusi indentik yang masing-masing memiliki mean μ dan variansi tak nol σ^2. Misalkan $Sn = X_1 + \cdots + Xn$, maka

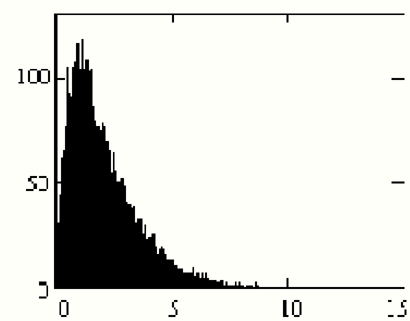
$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = \Phi(x)$$

dimana $\Phi(x)$ adalah peluang dari suatu variabel random normal standard lebih kecil dari x.

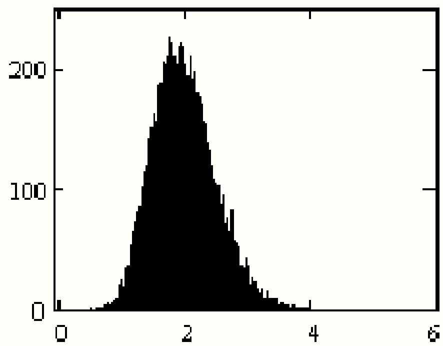
The population is $\chi^2(2)$ which has $\mu = 2$ and $\sigma^2 = 4$. If we draw n values from this distribution 25,000 times, compute the mean and standard deviation of these 25,000 draws, and plot a histogram of the results, we have the following graphs and values. We are expecting the mean and standard deviation of the 25,000 draws to be $\bar{x} - 2$ and $s - \frac{2}{\sqrt{n}}$, respectively.



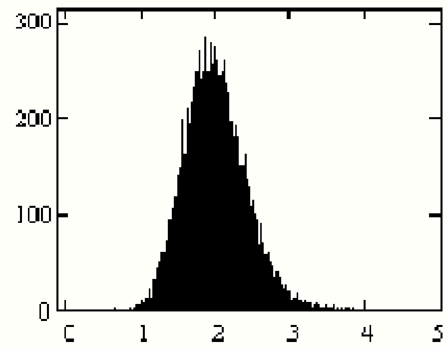
$n - 1, \bar{x} - 1.995, s - 2.007$



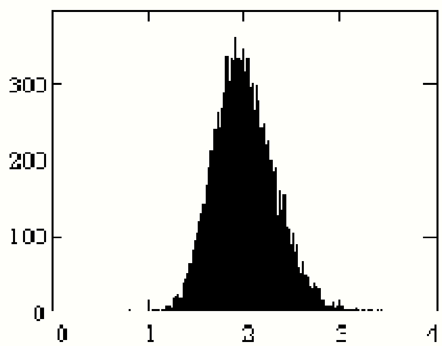
$n - 2, \bar{x} - 2.017, s - 1.434$



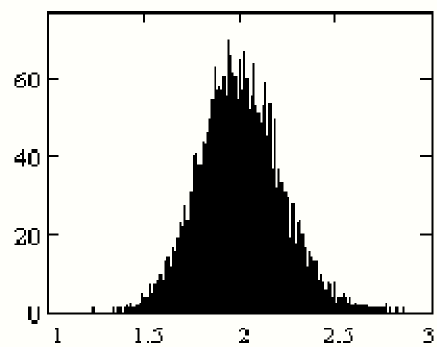
$n = 16, \overline{x} = 1.993, s = 0.469$



$n = 25, \overline{x} = 2.000, s = 0.401$

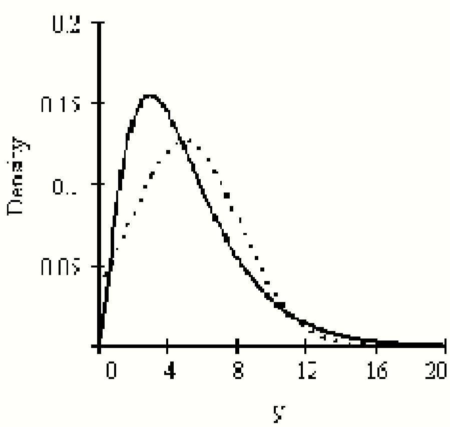


$n = 40, \overline{x} = 2.001, s = 0.315$

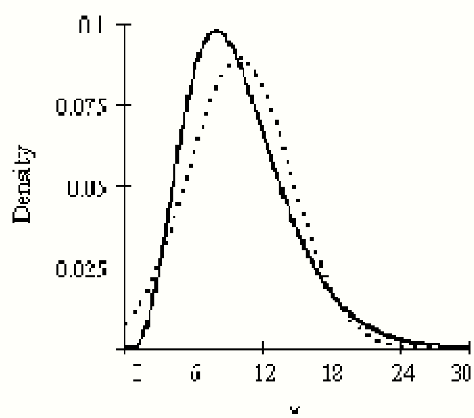


$n = 100, \overline{x} = 2.001, s = 0.200$

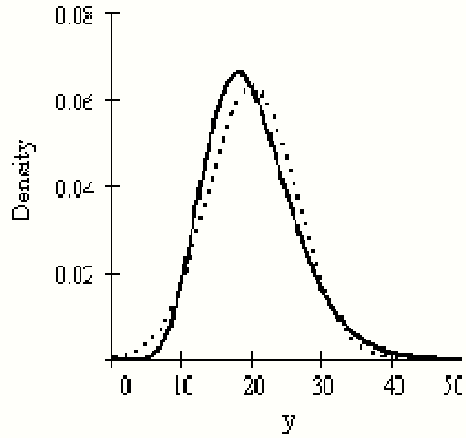
We expect that the distribution function for the chi-square distribution with υ degrees of freedom will approach the normal distribution function with mean υ and variance 2υ, that is, $\chi^2(\upsilon) \sim N(\upsilon, 2\upsilon)$ and υ increases. The graphs of these probability density functions are given below. In the first set of graphs, the chi-square probability density function is in bold and the normal density function is dashed.



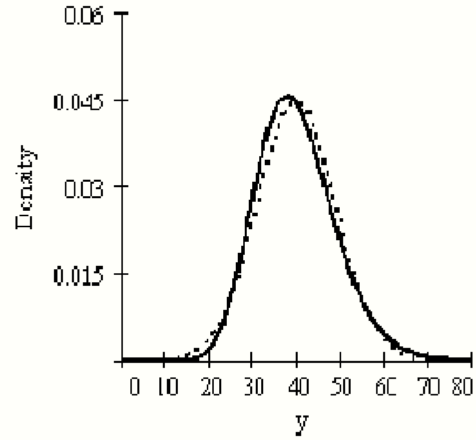
$\chi^2(5) \sim N(5,10)$



$\chi^2(10) \sim N(10,20)$



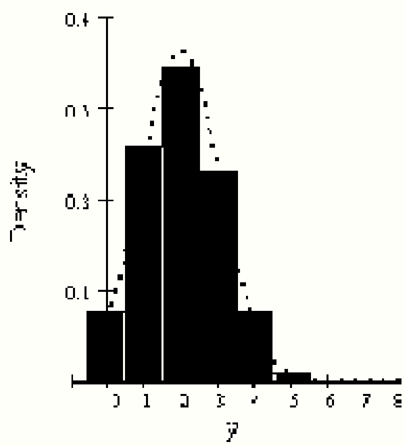
$\chi^2(20) \approx N(20,40)$



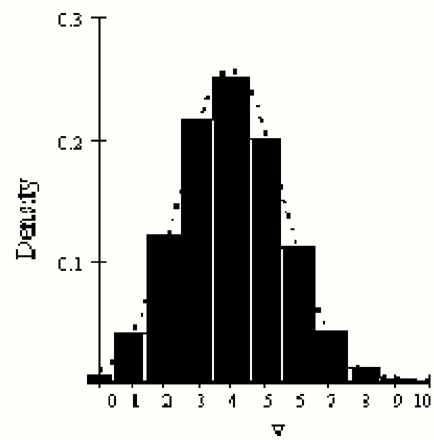
$\chi^2(40) \approx N(40,80)$

$$B(n,p) \approx N\left(np, np(1-p)\right).$$

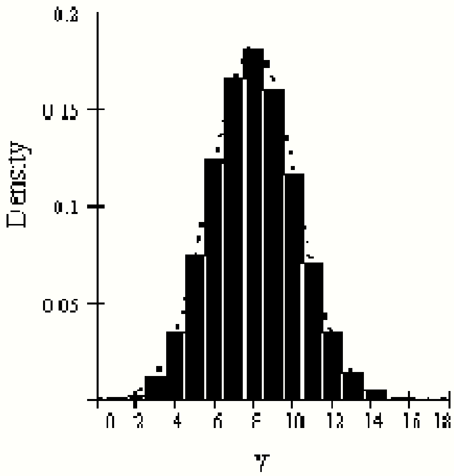
In the second set of graphs, the binomial density function is in bold and the normal probability density function is dashed.



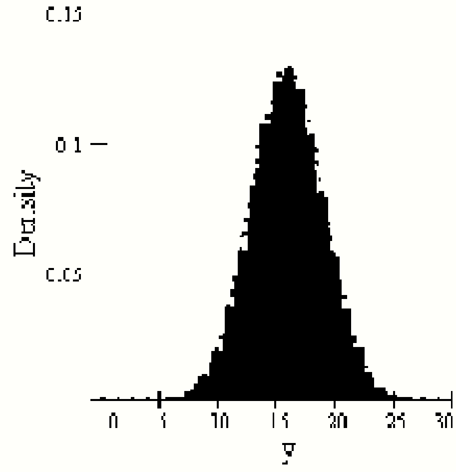
$B(5,0.4) \approx N\left(2,(5)(0.4)(0.6)\right)$



$B(10,0.4) \approx N\left(4,(10)(0.4)(0.6)\right)$

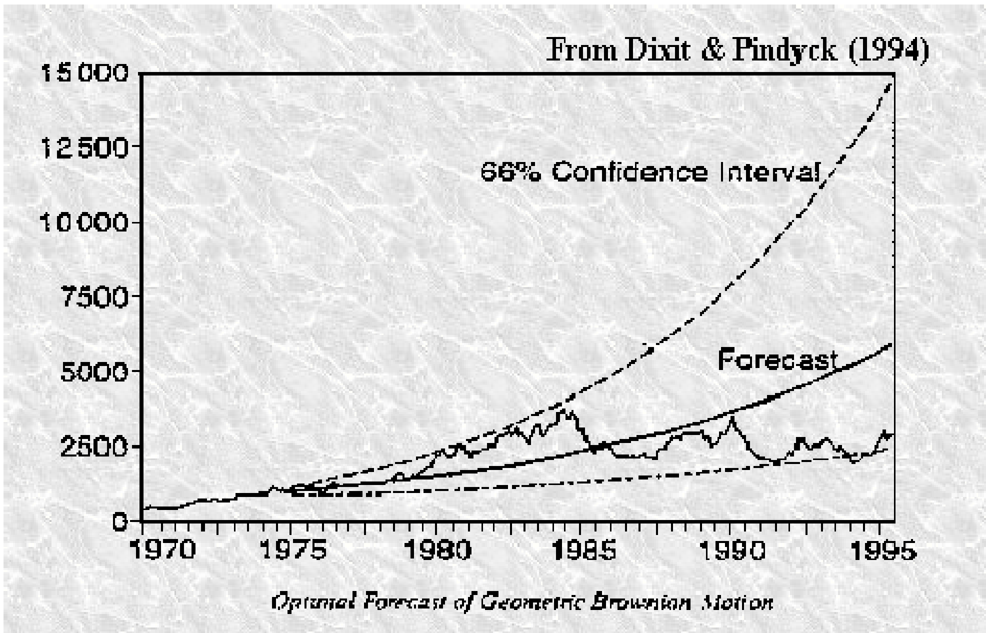


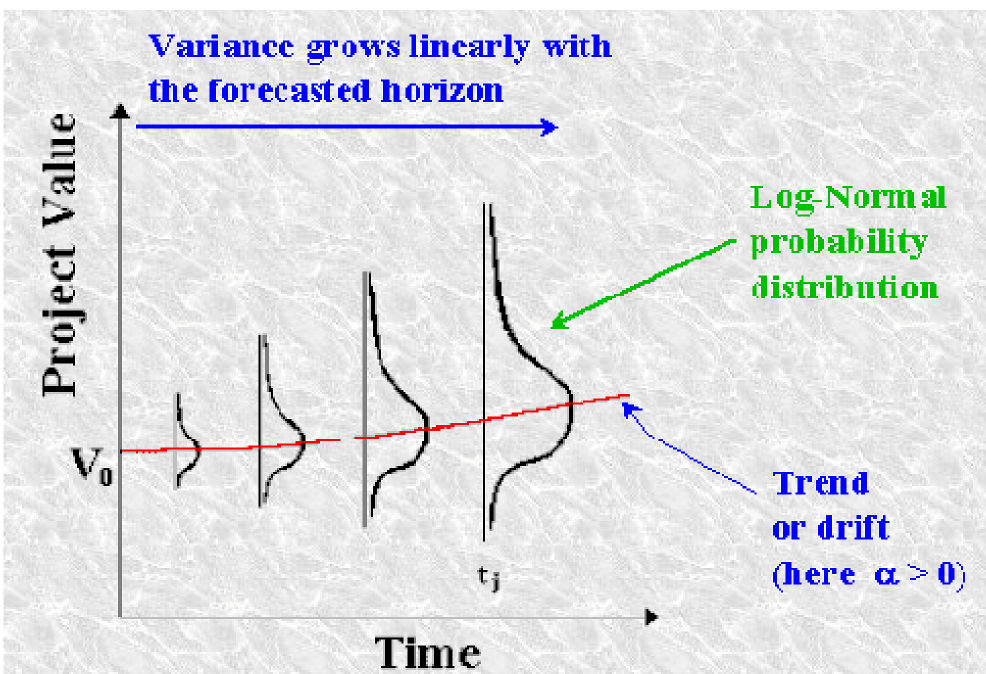
$B(20,0.4) \approx N\big(8,(20)(0.4)(0.6)\big)$



$B(40,0.4) \approx N\big(16,(40)(0.4)(0.6)\big)$

4. Geometric Brownian Motion





Misalkan $S(y)$ adalah harga dari security pada saat y waktu sekarang, dengan waktu awal adalah 0. Kumpulan harga $S(y), 0 \leq y < \infty$, mengikuti gerak Brown geometrik (Geometric Brownian Motion) dengan parameter drift μ dan volatility (peremeter ketidakstabilan) σ, untuk semua nilai taknegatif y dan t, jika variabel random

$$(\frac{S(t+y)}{S(y)})$$

saling bebas dari semua harga sampai waktu y. Dan juga, jika

$$log(\frac{S(t+y)}{S(y)})$$

adalah variabel random normal dengan mean μt dan variansi $t\sigma^2$.

Saling bebas?

Jika s_0 adalah nilai awalnya maka

$$E[S(t)] = s_0 e^{t(\mu+\sigma^2/2)}.$$

5. GBM sebagai Suatu Limit dari Model yang Lebih Sederhana

Misalkan Δ adalah penambahan kecil dari waktu. Setiap perubahan waktu Δ, harga security akan naik atau turun, yaitu naik sejauh u dengan peluang p dan turun sejauh d dengan peluang $1 - p$.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \ \ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$
$$p = (\frac{1}{2})(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

Bagaimana jika Δ terus mengecil? Harga akan lebih sering berubah, walaupun faktor u dan d makin dekat dengan 1. Hal ini menunjukkan bahwa kumpulan harga ini menjadi GBM. Sebaliknya, GBM dapat diaproksimasi oleh model di atas, yang lebih sederhana

Akan ditunjukkan bahwa model di atas akan menjadi GBM jika Δ mengecil terus. Misal Y_i adalah variabel random dengan

$$Y_i = \begin{cases} 1 & naik\ saat\ i\Delta \\ 0 & turun \end{cases}$$

Frekuensi harga naik selama waktu n : $\sum_{i=1}^{n} Y_i$

Frekuensi harga turun: $n - \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Harga sampai ke n adalah (Binomial)

$$S(n\Delta) = S(0) u^{\sum_{i=1}^{n} Y_i} d^{n-\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

$$S(n\Delta) = d^{\mathrm{n}} S(0) (\frac{u}{d})^{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

Jika $n = t/\Delta$

$$\frac{S(t)}{S(0)} = d^{t/\Delta} S(0) \frac{u^{\sum_{i=1}^{t/\Delta} Y_i}}{d}$$

$$log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \frac{t}{\Delta} log(d) + log \frac{u^{\sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i}}{d}$$

$$= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i$$

Jika $\Delta \to 0, \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i$ semakin banyak, sehingga distribusi $log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ $d$apat diaproksimasi oleh kurva normal. Maka didapat

$$E[log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)] = \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} E(Y_i)$$

$$= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \frac{t}{\Delta} p$$

$$= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} (1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

$$= \mu t$$

$$Var(log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)) = 4\sigma^2 \Delta \sum_{i=1}^{t/\Delta} Var\ Y_i$$

$$= 4\sigma^2 \Delta \frac{t}{\Delta} p(1-p)$$

$$\approx \sigma^2 t, karena\ p \approx \frac{1}{2}\ untuk\ \Delta\ kecil$$

6. Gerak Brown

Definisi Koleksi dari harga $S(y), 0 \leq y < \infty$ dikatakan mengikuti Gerak Brown dengan parameter drift μ dan variansi σ^2 jika untuk semua nilai tak negatif y dan t, variabel random

$$S(t+y) - S(y)$$

adalah saling bebas untuk semua nilai sampai waktu y, dan juga merupakan variabel random normal dengan mean μt dan variansi $\sigma^2 t$.

Kelemahan model Gerak Brown untuk memodelkan pergerakan harga saham atau komoditi adalah:

a. secara teoritis dapat bernilai negatif
b. beda harga dalam jangka waktu tertentu memiliki distribusi normal yang sama, apapun nilai awalnya. Apakah peluang turun 25% dari $ 20 ke $ 15 akan sama dengan penurunan 50% dari $ 10 ke $ 5?

GBM tidak memiliki kelemahan di atas. Kesamaannya adalah apabila μ dan σ sudah ditentukan, informasi yang diperlukan untuk meperkirakan nilai harga di depan hanyalah harga pada saat sekarang.